|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ  И НАУКИ КРАСНОДАРСКОГО КРАЯ  Государственное бюджетное образовательное учреждение  дополнительного образования детей  «ЦЕНТР ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ ДЛЯ ДЕТЕЙ»  350000 г. Краснодар,  ул. Красная, 76  тел. 259-84-01  E-mail: cdodd@mail.ru |  | **Всероссийская олимпиада школьников**  **по математике**  **2014-2015 учебный год**  **Муниципальный этап**  **11 класс, ответы**  **Председатель предметно-методической комиссии: Бирюк А.Э., д.ф.-м.н., доцент** |

**ОТВЕТ к задаче № 1**

Решите уравнение

**Решение.** Исходное уравнение эквивалентно уравнению

, где и . Получаем уравнение

**Ответ**. .

**ОТВЕТ к задаче № 2**

Можно ли выбрать 10 различных натуральных чисел так, чтобы каждое из них делило нацело сумму остальных? Обоснуйте свой ответ.

**Решение:** да, например, 1, 2, 3, 6, 12 и т.д. Каждое следующее число равняется сумме всех предыдущих.

**ОТВЕТ к задаче № 3**

Докажите, что если целые числа *a*, *b*, *c* таковы, что , то их произведение *abc* кратно 60. Обоснуйте свой ответ.

**Решение.** 60 = 3·5·4. Если ни одно из чисел *a*, *b* и *c* не делится на 3, то числа , и дают остаток 1 при делении на 3, но

Если ни одно из чисел *a*, *b* и *c* не делится на 5, то числа , и при делении на 5 имеют остаток 1 или 4; но ни 1 + 1, ни 1 + 4, ни 4 + 4 не сравнимо ни с 1, ни с 4 по модулю 5.

Наконец, докажем делимость произведения *abc* на 4. Случай, когда числа *a* и *b* оба чётные, очевиден. Если числа *a* и *b* оба нечётны, то и, следовательно, , что невозможно: квадрат целого числа не может давать при делении на 4 остаток 2. Осталось рассмотреть случай, когда числа *a* и *b* разной чётности. Для определённости, пусть *a* нечётно, а *b* чётно. Поскольку квадрат любого нечётного числа сравним с 1 по модулю 8, то , откуда , что и требовалось доказать.

**ОТВЕТ к задаче № 4**

В пространстве заданы две точки *А* и *B*, расстояние между которыми равно 2014. Множество *M* состоит из всех таких точек *X*, для которых скалярное произведение векторов и равно 2015. Найдите наибольшее расстояние между точками заданного множества *M*.

**Решение.** Введём систему координат, так что точка *A* имеет координаты (-1007,0,0), а точка B имеет координаты (1007,0,0). Пусть точка *X* множества *M* имеет координаты (*x*,*y*,*z*). Тогда вектор имеет координаты , а вектор имеет координаты . Запишем условие :

замечая, что , находим, что множество *M* — это сфера радиуса 1008. Следовательно, наибольшее расстояние — это диаметр, равный 2016.

**Ответ:** 2016.

**Замечание.** Возможен двумерный вариант этого решения. Зафиксируем произвольную точку *X* множества *M*. Докажем, что *OX*=1008, где *O* — середина отрезка *AB*. Для этого проведем плоскость через точки *A*, *B* и *X* и, например, проведем шаги приведенного выше решения, но в двумерном случае.

**Замечание.** Если замечено, что на прямой AB есть две точки множества *М*, между которыми расстояние равно 2016 (т.е. показано, что ответ ≥ 2016): 1 балл.

**ОТВЕТ к задаче № 5**

Набор чисел: 1, 2, 3, ..., 2014 разрешается записать в строчку (слева направо) в таком порядке, что если где-то (не на первом месте) записано число *m*, то где-то слева от него встретится хотя бы одно из чисел *m* + 1 или *m* – 1. Сколькими способами это можно сделать? Обоснуйте свой ответ.

**Решение.** Пусть на первом месте стоит число k. Заметим, что если k > 1, то числа k – 1, k – 2, ..., 1 стоят в нашей перестановке в порядке убывания (если двигаться слева направо). Действительно, по условию левее числа 1 должно стоять 2, левее 2: 1 или 3, то есть 3, левее 3: 2 или 4, то есть 4 и т. д. Аналогично, при k < 2014 числа k + 1, k + 2, ..., 2014 стоят в порядке возрастания, так как левее 2014 должно быть 2013, левее 2013 – число 2012 и т. д. Следовательно, любая из рассматриваемых перестановок однозначно задаётся набором мест, занимаемых числами 1, 2, ..., k – 1 (таких мест может вообще не быть, если k = 1, то есть для перестановки 1, 2, ..., 2014). Количество этих наборов равно количеству подмножеств множества из 2013 элементов – всех мест, кроме первого, то есть 22013. По числу элементов подмножества однозначно определяется число k, стоящее на первом месте.

**Ответ:** 22013