

1. Таня измерила угол между часовой и минутной стрелками на часах с двенадцатичасовым циферблатом. Спустя полчаса она опять измерила угол между стрелками, и он оказался тем же самым. Определите, каким мог быть этот угол.

Ответ: $82,5^\circ$.

Решение. Если минутная стрелка не обогнала часовую, то угол между ними все время уменьшался, равенство невозможно. За полчаса минутная стрелка повернулась на 180° . Если угол был тупой, то после обгона он станет острым (из-за движения часовой стрелки он только уменьшится) – равенства снова нет. Значит, угол 180° состоит из двух острых углов x (вначале и в конце) и угла 15° , на который повернулась часовая стрелка за полчаса. Поэтому $x = (180^\circ - 15^\circ) : 2 = 82,5^\circ$.

2. Первое число последовательности чисел равно 1. Каждое последующее получается прибавлением к предыдущему суммы его цифр. Может ли в этой последовательности находиться число 20222022?

Ответ: Нет, не может.

Решение.

Сумма цифр числа даёт такой же остаток при делении на 3, как и само число. Если число при делении на 3 даёт остаток 1, то следующее за ним в последовательности будет иметь остаток $1+1=2$. Если число при делении на 3 даёт остаток 2, то следующее за ним в последовательности будет иметь такой же остаток при делении на 3, как и $2+2=4$, т. е. 1. Поэтому если член последовательности не кратен 3, то и все последующие числа также не делятся на 3. Значит, число 20222022, кратное 3, не может быть элементом последовательности.

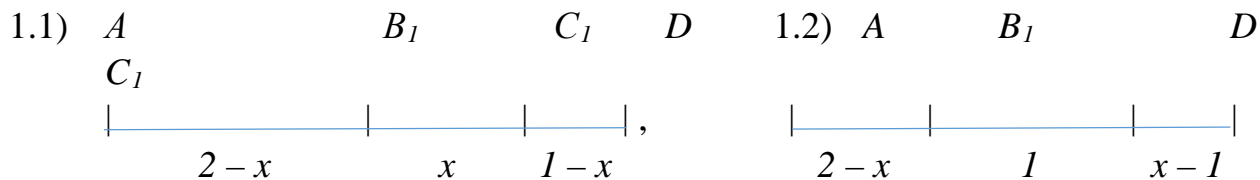
3. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC угол BAD острый. Найдите сумму длин оснований этой трапеции, если известно, что $B_1D = 1$ и $AC_1 = 2$, где B_1 и C_1 – основания перпендикуляров к прямой AD , проведённых из точек B и C соответственно.

Ответ: 3 или 1.

Решение. Так как угол BAD острый, то трапеция расположена в одной полуплоскости относительно прямой, проходящей через точку A перпендикулярно к прямой AD . Ясно, что BCC_1B_1 – прямоугольник и обе точки B_1 и C_1 лежат на луче AD , причём точка B_1 находится между точками A и C_1 . Пусть $BC = x$, тогда $B_1C_1 = x$ ($x > 0$). Так как точки B_1 и D не совпадают в силу $B_1D = 1$, то возможны только два случая: 1) точка B_1 лежит на луче AD

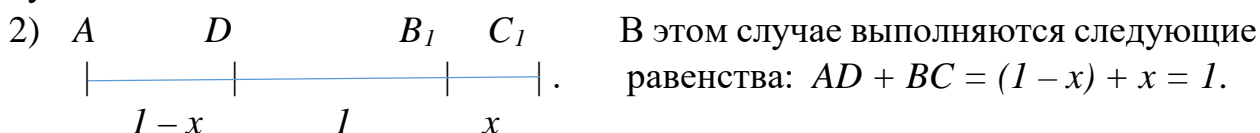
между точками A и D ; 2) точка B_1 лежит на луче AD за точкой D . Для определённости, не ограничивая общности рассуждений, можем считать, что луч AD направлен вправо.

В случае 1) возможны следующие два расположения точек A, B_1, C_1 и D на луче AD :



(возможность совпадения точек C_1 и D учитываем в ситуации 1.1) при $x = 1$). В этом случае для 1.1) имеем $AD + BC = ((2 - x) + x + (1 - x)) + x = 3$, а для 1.2) также имеем $AD + BC = ((2 - x) + 1) + x = 3$.

В случае 2) возможно только одно расположение точек A, B_1, C_1 и D на луче AD :



Итак, допустимые значения суммы $AD + BC$ находятся среди чисел 3 и 1.

В заключение заметим, что трапеции, удовлетворяющие условию задачи, существуют. Так, например, в обоих случаях 1.1) и 2) при $x = 0,4$ выполняется неравенство $AD > x$, то есть $AD > BC$. Ввиду $AD \parallel BC$ это означает, что в обоих случаях $ABCD$ – трапеция, а не параллелограмм.

4. В шахматном турнире, проводимом по круговой системе (каждый участник должен встречаться с каждым), один шахматист заболел и не доиграл свои партии. Всего в турнире было проведено 24 встречи. Сколько шахматистов участвовали в турнире? Сколько партий сыграл выбывший участник?

Ответ: 8 участников турнира, выбывший сыграл 3 партии.

Решение. Пусть участников n . Построим граф, в котором вершины — участники, ребра соединяют сыгравших между собой партию. Если бы были проведены все встречи, такой граф был бы полным и имел $n \cdot (n-1) / 2$ ребер. Так как сыграны были не все партии, то $n \cdot (n-1) / 2 \geq 24$, или $n \cdot (n-1) \geq 48$. Подбором находим, что $n = 7$ не подходит, $n = 8$ подходит. Если $n = 8$, то оставшиеся 7 человек сыграли между собой $7 \cdot 6 / 2 = 21$ партию. Значит, заболевший сыграл $24 - 21 = 3$ партии. Осталось убедиться, что $n = 9$ не подходит. Если $n = 9$, то оставшиеся 8 человек сыграли между собой $8 \cdot 7 / 2 = 28$ партий, что противоречит условию задачи.