**Лекция № 3. Олимпиадная математика (7 класс).**

**Домашние задания.**

**Задача 1.** При всех ли натуральных *n* выражение *n*4 – *n*2 кратно 12?

**Задача 2.** Внутри круга отмечена точка:

Требуется разбить круг на три произвольных части, из которых можно было бы собрать такой же круг, с отмеченной точкой в центре.

**Задача 3.** Сравните выражения (не используя калькулятор):

12345679·12345677 и 123456782.

**Задача 4.** В Тридесятом Царстве каждый 19-й дракон – огнедышащий. Но лишь каждое 20-е огнедышащее существо является драконом. Кого в Тридесятом Царстве больше – драконов или огнедышащих существ?

**Задача 5.** Докажите, что 1·1! + 2·2! + … + *n*·*n*! = (*n* + 1)! – 1 при любом натуральном *n*.

**Решения и ответы.**

**Задача 1. Решение. Способ 1.** Составим таблицу остатков при делении натурального числа *n* и включающих его выражений на 12.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *n* | *n*2 | *n*4 | *n*4 – *n*2 |
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |
| 2 | 4 | 4 | 0 |
| 3 | 9 | 9 | 0 |
| 4 | 4 | 4 | 0 |
| 5 | 1 | 1 | 0 |
| 6 | 0 | 0 | 0 |
| 7 | 1 | 1 | 0 |
| 8 | 4 | 4 | 0 |
| 9 | 9 | 9 | 0 |
| 10 | 4 | 4 | 0 |
| 11 | 1 | 1 | 0 |

Из таблицы видно, что выражение кратно 12 при любом натуральном *n*.

**Способ 2.** Если *n* – чётно, то *n*2 делится на 4; если *n* – нечётно, до *n*2 – 1 делится на 4. Следовательно, *n*2(*n*2 – 1) = *n*4 – *n*2 кратно 4 при любом *n*.

Ровно одно из трёх последовательных натуральных чисел кратно 3. Следовательно, их произведение кратно 3. Следовательно, (*n* – 1)*n*(*n* + 1) кратно 3. Следовательно, (*n* – 1)*n*2(*n* + 1) = *n*4 – *n*2 тоже кратно 3.

Так как *n*4 – *n*2 кратно 3 и 4, то оно кратно и НОК(3, 4) = 12.

**Ответ:** да, при всех.

**Задача 2. Решение.** Вырежем из окружности две маленьких окружности одинакового радиуса так, чтобы: центр первой маленькой окружности совпадал с центром основной окружности; центр второй – перемещаемая точка. Поменяем маленькие окружности местами.

**Задача 3. Решение.** 12345679·12345677 = (12345678 + 1)(12345678 – 1) = = 123456782 – 1. Так как 123456782 – 1 < 123456782, то 12345679·12345677 < 123456782.

**Ответ:** 12345679·12345677 < 123456782.

**Задача 4.** Пусть *A* – множество драконов, а *B* – множество огнедышащих существ Тридесятого Царства. Тогда пересечение эти двух множеств – множество всех огнедышащих драконов. Пусть  (количество огнедышащих драконов равно *x*). Тогда по условию задачи  . Так как *x* – натуральное число, то .

**Ответ:** огнедышащих существ в Тридесятом Царстве больше.

**Задача 5.** Заметим, что *k*·*k*! = (*k* + 1 – 1)*k*! = (*k* + 1)*k*! – *k*! = (*k* + 1)! – *k*!

Следовательно, 1·1! + 2·2! + … + *n*·*n*! = 2! – 1! + 3! – 2! + 4! – 3! + … + (*n* + 1)! –– *n*! = (*n* + 1)! – 1.