Министерство образования, науки и молодёжной политики
Краснодарского края
Государственное бюджетное учреждение
дополнительного образования
Краснодарского края «Центр развития одарённости»

Методические рекомендации к выполнению контрольной работы № 4 по математике для учащихся 5 класса очно-заочного обучения (с применением дистанционных образовательных технологий и электронного обучения)
(заочные курсы «Юниор»)

Составитель:
Невечеря Артём Павлович,
преподаватель ФГБОУ ВО «КубГУ»

Краснодар
2020

Аннотация

Цель и задачи программы – первоочередной целью данной программы является развитие математического образа мышления у учащихся. Достижение данной цели обеспечивается через формирование знаний и навыков решения нестандартных математических задач, а также углубление школьных знаний по математике. Также данная программа способствует становлению и укреплению познавательных интересов учащихся.

В ходе достижения цели данной программы предполагается решение следующих **задач**:

- образовательные (предметные) задачи: формирование у учащихся целостного представления о нестандартных методах решения различных математических задач; формирования устойчивого интереса к математике; развитие умения формализовывать решаемые математические задачи; способствование пониманию значимости математики для современного общества; развитие логического мышления у обучающихся.
- личностные задачи: развитие воображения, образного мышления, пространственных представлений у учащихся; развитие мыслительной деятельности и творческого подхода в поиске способов решения математических задач; формирование умения корректной самооценка способностей у учащихся; развитие способности к поиску нужной информацию из различных источников; развитие способности к самостоятельной и коллективной деятельности, включения своих результатов в результаты работы группы, соотнесение своего мнения с мнением других участников учебного коллектива и мнением авторитетных источников.
- метапредметные задачи: развитие у учащихся интереса к процессу познания, желания преодолевать трудности; развитие интеллектуальной культуры личности; развитие умения обдумывать, планировать свои действия; понимать поставленную задачу и решать её в соответствии с заданными правилами; осуществлять контроль, самоконтроль и самооценку; проявлять волевые усилия при решении нестандартных задач; проводить доказательные рассуждения, логически обосновывать выводы.

Пояснительная записка

Направленность: данная дополнительная общеобразовательная программа имеет естественнонаучную направленность с уклоном в физико-математический профиль;

Актуальность данной дополнительной образовательной программы состоит в том, что она развивает в у учащихся творческие способности, способствует мотивации к углублённому изучению методов решения нестандартных математических задач, и при этом поддерживает изучение основного курса, направлена на систематизацию, расширение и повторение знаний учащихся. Вопросы, рассматриваемые в программе, примыкают к основному курсу математики в школе. Поэтому данная программа будет способствовать совершенствованию и развитию математических знаний и умений учащихся.

Новизна состоит в том, что данная программа достаточно универсальна, имеет большую практическую значимость. Она доступна обучающимся. Начинать изучение программы можно с любой темы. Предлагаемая программа рассчитана на обучающихся, которые стремятся не только развивать свои навыки в применении математических преобразований, но и рассматривают математику как средство получения дополнительных знаний, необходимых для успешного выступления на олимпиадах по математике.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Лекционные материалы

Тема 1: Принцип Дирихле

Рассмотрим в общем виде постановку данного принципа:

Если в n клетках сидит не меньше $kn + 1$ кроликов, то хотя бы в одной клетке кроликов не меньше $k + 1$.

Или, аналогично:

Если в n клетках сидит не больше $kn - 1$ кроликов, то хотя бы в одной клетке кроликов не больше $k - 1$.

Основной проблемой при решении задач с помощью данного принципа в этом случае является определение «кроликов» и «клеток».

Пример. На Земле живёт примерно 7,7 млрд человек. Известно, что количество людей старше 100 лет не превосходит 1%. Докажите, что найдутся хотя бы 3 человека, родившиеся в одну и ту же секунду. Для упрощения можно считать, что в каждом году ровно 365 дней.

Решение. Из условия задачи следует, что количество долгожителей не превосходит 770 млн., следовательно, количество людей, которым сейчас не больше 100 лет не меньше $7700 - 770 = 6930$ млн человек. Или 6,93 млрд.

Применим принцип Дирихле. Все секунды за последние 100 лет – «клетки», жители, чей возраст не превосходит 100 лет – «кролики». Тогда количество клеток равняется $60 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 365 \cdot 100 = 3153600000$. Так как, $6930000000 > 2 \cdot 3153600000 + 1$, то по принципу Дирихле найдётся такая секунда, в которую родились не менее 3 человек. Что и требовалось доказать.

Примечание. Данный принцип является частным случаем метода доказательства от противного – любая задача, решаемая с помощью принципа Дирихле, решается и с помощью метода доказательства от противного.

Тема 2: Математические ребусы

В задачах данного типа приводится некоторая зашифрованная запись арифметического вычисления. Решением является полное восстановление такой записи.

Запись может быть зашифрована полностью (все цифры заменены буквами или другими символами) либо частично (часть цифр «стёрта» – заменена на точки либо другие символы).

Рассмотрим пример.

Найдите хотя бы одно решение для математического ребуса:

ДО + РЕ + МИ = ФА.

Из записи следует, что сумма трёх двухзначных чисел должна равняться некоторому другому двухзначному числу. Причём все цифры, участвующие в записи этих четырёх двухзначных чисел, различны.

Перебором получаем одно из возможных решений: 12 + 34 + 50 = 96. То есть, Д = 1, О = 2, Р = 3, Е = 4, М = 5, И = 0, Ф = 9, А = 6.

Если в задаче не сказано, что достаточно найти одно решение, то поиск решений продолжается до тех пор, пока ни будут получены все возможные ответы.

Для ускорения перебора в некоторых ситуациях необходимо использовать дополнительные логические рассуждения.

Рассмотрим ещё один пример: ДОСКА + ДОСКА + ДОСКА = ЛОДКА.

Видно, что остаток при делении на 100 выражения КА + КА + КА должен равняться КА. Это возможно лишь в том случае, если КА = 50 (К = 5, А =0). Для буквы О возможны следующие варианты:

1) Остаток при делении на 10 выражения О + О + О равняется О;
2) Остаток при делении на 10 выражения О + О + О + 1 равняется О;
3) Остаток при делении на 10 выражения О + О + О + 2 равняется О.

В первом случае О равняется либо 0, либо 5, но этого не может быть, так как этим цифрам равны буквы К и А.

Во втором случае решений нет (разная чётность у О и 3О + 1).

В третьем случае решения – числа 4 и 9.

Продолжая рассуждения получаем: С = 7, О = 9, Д = 2, Л = 8. Таким образом, исходная запись была полностью расшифрована.

Тема 3: Сюжетные логические задачи – истинные и ложные высказывания

В большинстве случаев структура таких задач однотипна: в тексте условия в явном или неявном виде представлен ряд высказываний; известно количество истинных, ложных высказываний (а также, в некоторых случаях, высказываний с неустановленной истинностью), но не известно, какие именно высказывания являются ложными или истинными. Для решения задачи необходимо определить истинность всех или части высказываний.

Чёткие правила решения таких задач не установлены. В общем случае устанавливается ряд проверяемых утверждений, последовательно проверяется не нарушается ли логика задачи, если принять данные утверждения за истинные.

Пример. В велогонка приняли участие 5 школьников. После гонок 5 болельщик заявили:

1) «Коля занял I место, а Ваня – IV»;
2) «Серёжа занял II место, а Ваня – IV»;
3) «Серёжа занял II место, а Коля – III»;
4) «Толя занял I место, а Надя – II»;
5) «Надя заняла III место, а Толя – V».

Зная, что одно из показаний каждого болельщика верное, а другое – неверное, найдите правильное расположение место.

Решение. Предположим, что высказывание «Коля занял I место» – истинное. Тогда Толя не мог занять I место, следовательно, Надя заняла второе место. Тогда Серёжа не мог занять II место, но тогда в утверждении второго болельщика оба высказывания – ложные. Противоречие.

Тогда предположим, что высказывание «Коля занял I место» – ложное. Тогда *Ваня на четвёртом* месте, а Серёжа занял не второе место. Но тогда *Коля на третьем* месте. Следовательно, Надя не могла занять третье место, *Толя – на пятом*. Толя не на первом, следовательно, *Надя на втором*. Осталось не рассмотренным первое место – его занял Серёжа.

Ответ. I – Серёжа, II – Надя, III – Коля, IV – Ваня, V – Толя.

Тема 4: Математические игры

Ключевым отличием математической игры от обычной является то, что в ней можно заранее определить победителя.

Решением задачи, содержащей математическую игру, является определение для одного из игроков такой стратегии, которая гарантирует ему победу в любом случае.

Существуют следующие подходы к решению задач данного типа:

1. Случай предопределённого победителя. Победитель неявно предопределён правилами, действия игроков ни на что не влияют.

2. Соответствие. Наличие удачного ответного хода у одного из игроков.

3. Решение с конца. Последовательно определяются позиции выигрышные и проигрышные для начинающего. Очередная позиция является выигрышная, если из неё можно получить ранее определённую проигрышную позицию, и наоборот – является проигрышной, если любой ход из неё ведёт к попаданию в ранее определённую выигрышную позицию.

4. Передача хода. Если один из игроков может в любом случае воспользоваться стратегией своего противника, то, очевидно, этот игрок может гарантировать себе ничью.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №4

Задание 1. В кошельке купца вперемешку лежат монеты двух различных номиналов. Какое наименьшее количество монет должен извлечь из своего кошелька купец вслепую, чтобы хотя две из оказались одного наминала?

Задание 2. Решите следующий математический ребус, подставив вместо букв цифры:

СОН•СОН=ГОМОН.

Задание 3. В одном городе живут правдолюбы (всегда говорят правду), лжецы (всегда лгут) и обычные жители (каждое их утверждение может оказаться как правдой, так и ложью). Однажды три горожанина, один из которых был правдолюбом, другой – лжецом, третий – обычным жителем, случайно встретились, и между ними произошёл такой диалог:
А: Я обычный житель...
Б: Это, конечно же, правда.
В: Я не обычный житель.
Кто из горожан А, Б, В – правдолюб, кто лжец, а кто обычный житель?

Задание 4. Катя и Максим по очереди забирают с игрового поля фишки – за свой ход любой игрок на своё усмотрение может взять либо одну, либо две. Выигрывает тот игрок, после хода которого на поле не осталось ни одной фишки. Кто побеждает при оптимальной игре обоих игроков, если всего на столе 100 фишек и Катя ходит первой?

Задание 5. Олег снова решил сыграть с Дианой в угадывание чисел, практически не изменив правила: он загадывает 2 натуральных числа, сумма которых равняется 33, а Диана должна за 4 вопроса эти числа угадать. Также, как и в прошлый раз в рамках одного вопроса можно называть сколько угодно чисел (например, «Задуманное число – или 1, или 2, или 3?»). Есть одно ключевое отличие – порядок ответов – теперь Олег даёт все 4 ответа только после того, как Диана задаёт последний 4-й вопрос. Сможет ли Диана в этом случае угадать загаданные числа?

Список литературы

а) Основная литература:

1. Богомолова О.Б. Логические задачи. – М.: «БИНОМ. Лаборатория знаний», 2013. – 277 с.
2. Екимова М.А., Кукин Г.П. Задачи на разрезание. – М.: МЦНМО, 2002. – 120 с.
3. Канель-Белов А.Я., Ковальджи А.К. Как решают нестандартные задачи. – М.: Издательство МЦНМО, 2008. – 96 с.
4. Кноп К.А. Взвешивания и алгоритмы: от головоломок к задачам. – М.: МЦНМО, 2011. – 104 с.
5. Медников Л.Э. Чётность. – М.: МЦНМО, 2009. – 60 с.

б) Дополнительная литература:

6. Виленкин Н.Я. Рассказы о множествах. – М.: МЦНМО, 2005. – 150 с.
7. Гарднер М. Математические новеллы. – М.: Мир, 1974. – 456 с.
8. Гарднер М. Математические чудеса и тайны. – М.: Мир, 1978. – 128 с.
9. Гарднер М. Нескучная математика. Калейдоскоп головоломок. – М.: АСТ: Астрель, 2008. – 288 с.
10. Генкин С.А., Итенберг И.В., Фомин Д.В. Ленинградские математические кружки: пособие для внеклассной работы. – Киров: Издательство «АСА», 1994. – 272 с.
11. Горбачёв Н.В. Сборник олимпиадных задач по математике. – М.: Издательство МЦНМО, 2004. – 559 с.
12. Летчиков А.В. Принцип Дирихле. Задачи с указаниями и решениями. – Ижевск: Издательство Удмуртского университета, 1992. – 108 с.
13. Лоповок Л.М. Математика на досуге: книга для учащихся среднего школьного возраста. – М.: Просвещение, 1981. – 158 с.
14. Мерзон Г.А., Ященко И.В. Длина, площадь, объём. – М.: МЦНМО, 2011. – 48 с.
15. Морозова Е.А., Петраков И.С., Скворцов В.А. Международные математические олимпиады. – М.: Просвещение, 1976. – 288 с.
16. Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения. – М.: Издательство Наука, 1975. – 465 с.
17. Прасолов В.В. Задачи по планиметрии: учебное пособие. – М.: МЦНМО, 2006. – 640 с.
18. Сергеев И.Н. Зарубежные математические олимпиады. – М.: Наука, 1987. – 416 с.
19. Штейнгауз Г. Сто задач. – М.: Издательство «Наука», 1976. – 168 с.
20. Штейнгауз Г. Математический калейдоскоп. – М.: Издательство «Наука», 1981. – 160 с.