Министерство образования, науки и молодёжной политики
Краснодарского края
Государственное бюджетное учреждение
дополнительного образования
Краснодарского края «Центр развития одарённости»

**Методические рекомендации
к выполнению контрольной работы № 4
по математике для учащихся 8 класса очно-заочного обучения
(с применением дистанционных образовательных технологий и
электронного обучения) (заочные курсы «Юниор»)**

Составитель:
Кузнецов Егор Александрович,
преподаватель кафедры
информационных образовательных технологий
Кубанского государственного университета

г. Краснодар
2020

Аннотация

Данная методическая разработка является сборником контрольных работ и методических рекомендаций по их проведению для реализации дополнительной общеобразовательной общеразвивающей программы «Курс математики для начинающего олимпиадника (8 класс)». Сборник направлен на развитие интеллектуальных умений учащихся на основе формирования у ребенка умений управлять процессами творчества: фантазированием, пониманием закономерностей, решением сложных проблемных ситуаций.

Пояснительная записка

Программа «Курс математики для начинающего олимпиадника (8 класс)» разработана в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом основного общего образования (приказ Министерства образования и науки Российской Федерации от 17 декабря 2010 года, №1897, с изменениями), федеральным государственным образовательным стандартом среднего общего образования (приказ Министерства образования и науки Российской Федерации от 17 мая 2012 года, № 413 с изменениями), методическими рекомендациями по проектированию дополнительных общеразвивающих программ (письмо Минобрнауки РФ от 18.11.2015 № 09-32-42).

Введение

Актуальность

Проблема работы с одаренными учащимися чрезвычайно актуальна для современного российского общества. К школе предъявляются сегодня высокие требования. Именно поэтому так важно определить основные задачи и направления работы с одаренными детьми в системе дополнительного образования.

Одаренность — это системное, развивающееся в течение жизни качество психики, которое определяет возможность достижения человеком более высоких (необычных, незаурядных) результатов в одном или нескольких видах деятельности по сравнению с другими людьми.

Никакого особого «рецепта» по работе с одаренными детьми нет. По своей природной сути большинство детей талантливы. Беда в том, что не все из них об этом знают. Проблема «нераскрытости» детей заключается в том, что воспитание в семье не всегда помогает раскрыться личности ребенка, а система образовательного процесса в школе не позволяет «рассмотреть» особенности каждого ребенка. Учебный процесс в общеобразовательной школе предполагает, что ребенок должен соответствовать стандарту тех требований, которые к нему предъявляются. Таким образом, многогранность и сложность явления одаренности определяет целесообразность существования разнообразных направлений, форм и методов работы с одаренными детьми.

Актуальность методической разработки определяется потребностью со стороны одарённых школьников на программы изучения математики, учебно-методические условия для реализации которых имеются на базе факультета математики и компьютерных наук КубГУ.

Новизна

Характерной особенностью программы «Курс математики для начинающего олимпиадника (8 класс)» является интеграция основного и дополнительного образования. Новизна дополнительной общеобразовательной общеразвивающей программы состоит в том, что талантливые обучающиеся вовлекаются в учебную деятельность, основываясь не на традиционных школьных учебных методах работы, а на методах классического университетского образования, более соответствующего запросам учеников. Также содержание программы позволяет не только углубить интеллектуальные познания учеников, но и расширить и дополнить процесс их гражданского воспитания. При этом приоритет программы отдается развитию у учащихся знаний и навыков, позволяющих успешно выступать на муниципальном, региональном и заключительном этапах Всероссийской олимпиады школьников по математике.

Цель

Целью данной методической разработки является обеспечение подготовки школьников к участию в олимпиадном движении по предмету Математика и углубленное изучение курса математики.

Основная часть

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО МАТЕМАТИКЕ

Метод крайнего

Особые, крайние объекты часто служат «краеугольным камнем» решения. Так, например, рассматривают наибольшее число, ближайшую точку, угловую точку, вырожденную окружность, предельный случай. Поэтому полезно сразу рассматривать особые, крайние объекты.

В задачах на метод крайнего работает метод минимального контрпримера: допустим, утверждение задачи неверно. Тогда существует минимальный в некотором смысле контрпример. И если окажется, что его можно ещё уменьшить, то получится искомое противоречие.

Пример 1. Плоскость разрезана вдоль N прямых общего положения, то есть таких, что никакие две не параллельны и никакие три не проходят через одну точку. Докажите, что к каждой прямой примыкает треугольник.

Решение. Выберем прямую и рассмотрим точки пересечения других прямых между собой. Среди этих точек пересечения выберем ближайшую к нашей прямой. Две прямые, проходящие через эту точку, пересекают исходную прямую и образуют с ней треугольник. Этот треугольник не могут пересекать другие прямые (подумайте, почему).

Пример 2. Докажите, что у любого многогранника есть две грани с одинаковым числом сторон.

Решение. Рассмотрим грань с наибольшим числом сторон. Обозначим эту грань G, число её сторон n. К каждой стороне G примыкает грань многогранника, всего примыкающих граней n. Число сторон у каждой грани заключено между 3 и $n - 1$, всего $n - 3$ возможности. Поскольку число возможностей меньше числа примыкающих граней, то по принципу Дирихле (см. тему «Принцип Дирихле») одна из возможностей повторится. Таким образом, среди граней, примыкающих к грани G, найдутся две грани с одинаковым числом сторон.

Пример 3. В каждой клетке шахматной доски записано число. Оказалось, что любое число равно среднему арифметическому чисел, записанных в соседних (по стороне) клетках. Докажите, что все числа равны.

Решение. Рассмотрим наибольшее из чисел. Оно равно своим соседям. Поскольку любые два числа соединяются цепочкой соседних чисел, все числа равны.

Пример 4. Из точки внутри выпуклого многоугольника опускают перпендикуляры на его стороны или их продолжения. Докажите, что хотя бы один перпендикуляр попадёт на сторону.

Указание. Рассмотрите ближайшую точку границы.

Пример 5. Докажите, что число $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$ не является целым.

Указание. Рассмотрите максимальную из степеней двойки, входящих в знаменатели слагаемых.

Типовые задачи

1. Дано 2019 чисел. Сумма любых 5 из них положительна. Докажите, что сумма всех чисел тоже положительна.
2. Среди учащихся Малого Матфака прошли соревнования по перетягиванию каната, в результате которого все оказались занесены в список по убыванию силы. Было решено проверить, смогут ли любые трое перетянуть любых двоих. За какое наименьшее число перетягиваний он может это установить?
3. Сколькими способами можно расставить в ряд числа от 1 до 100 так, чтобы соседние числа отличались не более, чем на 1?
4. На шахматной доске стоит несколько ладей. Докажите, что по крайней мере одна из них бьёт не более двух других.
5. Несколько гангстеров сидят за круглым столом и делят награбленное, причём доля каждого составляет ровно половину от суммы долей его соседей справа и слева. Докажите, что всем денег достанется поровну.
6. У Пети всего 28 одноклассников. У каждых двух из этих 28 различное число друзей в этом классе. Сколько друзей у Пети?
7. Ночью на городской площади собралось 2019 гангстеров. Они не смогли мирно договориться, и каждый из них выстрелил в ближайшего к нему гангстера. Все они выстрелили одновременно, все попарные расстояния между гангстерами различны. Докажите, что не все гангстеры будут убиты.

8. Доказать, что шахматную доску 4x4 клетки нельзя обойти ходом шахматного коня, побывав на каждом поле по одному разу и последним ходом вернувшись на исходную клетку.
9. 200 солдат выстроены прямоугольником по 10 человек в каждом поперечном ряду и по 20 человек в каждом продольном ряду. В каждом продольном ряду выбран самый высокий солдат, а затем из отобранных 10 человек выбран самый низкий. С другой стороны, в каждом поперечном ряду выбран самый низкий солдат, а затем среди отобранных 20 выбран самый высокий. Кто из двоих окажется выше?
10. На предвыборном собрании выступали кандидаты в депутаты. Через какое-то время первый кандидат сказал: «До этого момента здесь прозвучало ровно одно неверное утверждение». «А теперь два», - сказал второй. «А теперь три», - произнес третий и так далее. Наконец, 12-й сказал, что прозвучало ровно 12 неверных утверждений. Сколько раз соврали за время собрания, если известно, что по крайней мере одно из этих высказываний правдиво?
11. 7 грибников собрали вместе 59 грибов, причем никакие двое не собрали поровну. Докажите, что какие-то три грибника собрали вместе не менее 33 грибов.
12. На тарелке лежат 9 разных кусочков сыра. Всегда ли можно разрезать один из них на две части так, чтобы полученные 10 кусочков делились бы на две порции равной массы по 5 кусочков в каждой?
13. а) Можно ли натуральные числа от 1 до 99 выписать в строчку так, чтобы модуль разности любых двух соседних чисел была не меньше 50?

    б) При каком наименьшем n числа от 1 до n можно выписать в строчку так, чтобы модуль разности любых двух соседних чисел была не меньше 50?
14. По окружности записаны 30 чисел. Каждое из этих чисел равно модулю разности двух чисел, стоящих после него по часовой стрелке. Сумма всех чисел равна 1. Найти эти числа.
15. Назовём автобусный билет (с шестизначным номером) счастливым, если сумма цифр его номера делится на 7. Могут ли два билета подряд быть счастливыми?
16. В одну из голов стоглавого дракона пришла мысль расположить свои головы так, чтобы каждая находилась между двумя другими. Сможет ли он это сделать? (Головы дракона можно считать точками в пространстве.)

17. На столе лежат одинаковые монеты без наложений. Докажите, что найдётся монета, которая касается не более трёх других.
18. На столе лежат произвольные монеты без наложений. Докажите, что найдётся монета, которая касается не более пяти других.
19. На столе лежат монеты без наложений. Докажите, что одну из них можно передвинуть по столу к его краю, не сдвинув других монет.
20. На полях шахматной доски расставлены целые числа, причём никакое число не встречается дважды. Докажите, что есть пара соседних (имеющих общую сторону) клеток, числа в которых отличаются не меньше, чем на 5.

<u>Рекомендуемые материалы для закрепления раздела:</u>
Канель-Белов А.Я., Ковальджи А.К. Как решают нестандартные задачи
Прасолов В.В., Задачи по планиметрии, глава 20. Принцип крайнего

Комбинаторика

Правило суммы: Если некоторый объект А можно выбрать n способами, а другой объект В можно выбрать m способами, то выбор «либо А, либо В» можно осуществить n + m способами.

Правило произведения: Если объект А можно выбрать n способами, а после каждого такого выбора другой объект В можно выбрать (независимо от выбора объекта А) m способами, то пары объектов А и В можно выбрать n·m способами.

Задача 1. а) В магазине «Все для чая» есть 5 разных чашек и 3 разных блюдца. Сколькими способами можно купить чашку с блюдцем?

б) В магазине есть еще 4 чайные ложки. Сколькими способами можно купить комплект из чашки, блюдца и ложки?

в) В магазине по-прежнему продается 5 чашек, 3 блюдца и 4 чайные ложки. Сколькими способами можно купить два различных предмета?

Задача 2. Сколько существует пятизначных чисел? А сколько пятизначных, состоящих только из чётных цифр?

Задача 3. Сколькими способами можно прочитать в таблице слово а) КРОНА; б) КОРЕНЬ, начиная с буквы «К» и двигаясь вправо или вниз?

```
КРОНА   К
РОНА   КО
ОНА   КОР
НА   КОРЕ
А   КОРЕН
   КОРЕНЬ
```

Размещения

Важное понятие комбинаторики — размещение. Давайте рассмотрим такую ситуацию: в классе, в котором 25 учеников, нужно выбрать старосту, его заместителя и помощника заместителя. Сколькими способами это можно сделать?

Очевидно, сначала 25 способами можно выбрать любого ученика в старосты. Затем из 24 оставшихся — заместителя старосты, а после этого любой из 23 оставшихся может оказаться помощником заместителя. По правилу произведения, всего имеем $A^3_{25} = 25 \cdot 24 \cdot 23$ вариантов.

Вообще, через A_n^k (читаем: «а из эн по ка») обозначают число способов выбрать из данных n элементов сначала первый элемент, потом второй, третий,..., k-й. Вычисляют его по формуле

$$A_n^k = n\,(n-1)\,...\,(n-k+1).$$

Заметьте: в правой части ровно k множителей, и последний из них равен $n - k + 1$, а вовсе не $n - k$, как могло показаться на первый взгляд. Формулу можно записать и через факториалы:

$$A_n^k = n!/(n-k)!$$

Числа сочетаний

Представьте себе, что в классе из 25 человек нужно выбрать не старосту, его заместителя и помощника его заместителя, а тройку начальников, которые, обладая равными правами, будут управлять и судить класс, не выясняя, кто из троих главный, кто менее главный, а кто так себе. Тогда способов будет не A_{25}^3, а в 6 раз меньше. (Подумайте об этом хорошенько! Здесь 6 = 3! — количество способов ранжировать трёх начальников, то есть количество всех перестановок на множестве из 3 элементов.)

Вообще, очень важные для комбинаторики и теории вероятностей числа сочетаний C_n^k (читаем: «число сочетаний из эн по ка» или «це из эн по ка») можно вычислить по формуле $C_n^k = A_n^k/k! = n!/(k!(n-k)!)$.

Задача 4. В футбольной команде (11 человек) нужно выбрать капитана и его заместителя. Сколькими способами это можно сделать?

Задача 5. У людоеда в подвале томятся 25 пленников.

а) Сколькими способами он может выбрать трех из них себе на завтрак, обед и ужин?

б) А сколько есть способов выбрать троих, чтобы отпустить на свободу?

Задача 6. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску белого и чёрного короля, чтобы получилась допустимая правилами игры позиция?

Задача 7. Начальник транспортного цеха пригласил несколько человек на совещание. Каждый участник совещания, входя в кабинет, пожимал руки всем присутствующим. Сколько человек участвовали в совещании, если было всего 78 рукопожатий?

Задача 8.

а) В столовой подают 10 разных блюд. Каждый день Ворчун берет некоторый набор блюд (возможно, не берет ни одного блюда), причем этот набор блюд должен быть отличен от всех наборов, которые он брал в предыдущие дни. Сколько дней Ворчун сможет питаться по таким правилам?

б) А сколько дней, если Ворчун ходит обедать в ресторан, где подают 100 блюд?

Задача 9.

Сколько решений имеет уравнение $x_1 + x_2 + x_3 = 1000$

а) в натуральных числах;

b) в целых неотрицательных числах?

<u>**Рекомендуемые материалы для закрепления раздела:**</u>

Генкин С.А., Итенберг И.В., Фомин Д.В., Ленинградские математические кружки

Горбачёв Н.В. Сборник олимпиадных задач по математике.

Элементы теории вероятностей

Множество всех равновозможных простейших событий назовём *пространством элементарных событий*. *Вероятностью* события A назовём отношение числа тех элементарных событий, при которых событие A происходит, к числу всех возможных элементарных событий. Таким образом, если событие A происходит в m из n возможных случаев, его вероятность $P(A)$ выразится дробью

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

В задачах, где число всех возможных элементарных событий конечно, число элементарных событий, благоприятных событию A, может быть найдено непосредственно.

В классе, состоящем из 20 *учеников,* 15 *человек занимаются в математическом кружке. Какова вероятность, что наудачу выбранный ученик окажется членом математического кружка*?

Решение. Пусть событие A состоит в том, что наудачу выбранный ученик является членом математического кружка. Тогда число элементарных событий, благоприятных событию A, равно 15. Число всех элементарных событий в данном случае равно 20. Значит, искомая вероятность равна $P(A) = 15/20 = 3/4$.

Бросают две игральные кости. Что более вероятно: *то, что сумма очков на выпавших гранях равна* 11 *или то, что сумма очков на выпавших гранях равна* 4?

Решение. Поставим в соответствие исходу эксперимента упорядоченную пару чисел (x, y), где x — число очков, выпавших на первой кости, а y — на второй. Пространство всех элементарных событий состоит из множества пар (x, y), где x и y принимают значения от 1 до 6. Число таких пар равно 36. Событию A, состоящему в том, что сумма очков, выпавших на двух костях, равна 11, благоприятны 2 элементарных события, которым соответствуют пары $(6, 5)$ и $(5, 6)$. Событию B, состоящему в том, что сумма очков, выпавшая на двух костях, равна 4, благоприятны 3 элементарных события, которым соответствуют пары $(1, 3)$, $(3, 1)$, $(2, 2)$. Вероятности событий A и B равны соответственно $P(A) = 2/36 = 1/18$ и $P(B) = 3/36 = 1/12$, и, следовательно, событие B более вероятно.

Типовые задачи

1. В урне А белых и В черных шаров. Из урны выбирают наугад сразу два шара Найдите вероятность того, что они оба окажутся белыми.

2. Из урны, содержащей N пронумерованных шаров, наугад вынимают по одному шару. Найдите вероятность того, что номера вытянутых шаров будут идти по возрастанию.
3. То же условие, но шар возвращается в урну, а номер его записывается. Найдите вероятность того, что окажется записанной последовательность 1, 2, 3, ..., n.
4. В ящике имеется 10 белых и 15 черных шаров. Из ящика вынимаются 4 шара. Какова вероятность того, что все вынутые шары будут белыми?
5. Дима пишет на доске некоторую цифру, а Наташа на обратной стороне еще одну. Какова вероятность того, что сумма этих цифр окажется равной 5.
6. Кирилл имеет 5 кубиков с буквами А, К, К, У, Л. Какова вероятность того, что ребенок соберет, случайно переставляя кубики, слово «кукла»?
7. Трое друзей решают жребием, кто идет за соком. У них есть одна монета. Как им устроить честный жребий так, чтобы все имели равные шансы сбегать?
8. Дима подбросил монету три раза. Найдите вероятность того, что а) первая монета выпала «орлом» вверх; б) выпало ровно два «орла»; в) выпала ровно одна «решка»; г) выпало не более двух «решек».
9. В лотерее выпущено n билетов, m из которых выигрывают. Толя купил k билетов. Какова вероятность того, что по крайней мере один из купленных билетов – выигрышный?

Рекомендуемые материалы для закрепления раздела:
Горбачёв Н.В. Сборник олимпиадных задач по математике.

ЗАДАНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ №4

Задача 1.

Докажите, что числа от 1 до 16 можно записать в строку, но нельзя записать по кругу так, чтобы сумма любых двух соседних чисел была квадратом натурального числа.

Задача 2.

Солдаты построены в две шеренги по n человек, так что каждый солдат из первой шеренги не выше стоящего за ним солдата из второй шеренги. В шеренгах солдат выстроили по росту. Докажите, что после этого каждый солдат из первой шеренги также будет не выше стоящего за ним солдата из второй шеренги

Задача 3.

Из 12 девушек и 10 юношей выбирают команду, состоящую из пяти человек. Сколькими способами можно выбрать эту команду так, чтобы в нее вошло не более трёх юношей?

Задача 4.

В ряд стоят 100 детей разного роста. Разрешается выбрать любых 50 детей, стоящих подряд, и переставить их между собой как угодно (остальные остаются на своих местах). Как всего за шесть таких перестановок гарантированно построить всех детей по убыванию роста слева направо?

Задача 5.

Дана таблица 3×3 (как для игры в крестики-нолики). В четыре случайно выбранные ячейки случайным образом поставили четыре фишки.

Найдите вероятность того, что среди этих четырёх фишек найдутся три, которые стоят в один ряд по вертикали, по горизонтали или по диагонали.

Критерии оценивания

Задача 1.
Правильное решение – 5 баллов.

Задача 2.
Правильное решение – 5 баллов.

Задача 3.
Правильное решение – 5 баллов.

Задача 4.
Правильное решение – 5 баллов.

Задача 5.
Правильное решение – 5 баллов.

Максимальное количество баллов – 25.