Министерство образования, науки и молодёжной политики
Краснодарского края
Государственное бюджетное учреждение
дополнительного образования
Краснодарского края «Центр развития одарённости»

Ответы к контрольной работе № 3 по математике для учащихся 8 класса очно-заочного (с применением дистанционных образовательных технологий и электронного обучения) обучения (заочные курсы «Юниор»)

Составитель:
Кузнецов Егор Александрович,
преподаватель кафедры
информационных образовательных
технологий ФГБОУ ВО «Кубанский
государственный университет»

Краснодар
2020

ОТВЕТЫ

Максимальное количество баллов – 25.

Задача 1.

Доказать, что числа $7n + 3$ и $5n + 2$ взаимно просты при любом натуральном n.

Решение: Действительно, НОД($7n$ + 3, $5n$ + 2) = НОД($2n$ + 1, $5n$ + 2) = НОД($2n$ + 1, n) = НОД(n, 1) = 1.

Критерии оценивания:

Правильное решение – 5 баллов.

Задача 2.

Найдите все целые решения уравнений:

а) $2x - 3y = 0$;

б) $7x - 21y = 1$;

в) $19x - 15y = -1$;

г) $23x - 17y = 11$;

д) $41x - 11y = 7$.

Ответ: а) $x = 3p, y = 2p$, б) Левая часть уравнения – целое число, кратное 7, правая – нет. Решений не существует. в) $x = -4 + 15p, y = -5 + 19p$, г) $x = 33 + 17p, y = 44 + 23p$, д) $x = -28 + 11p, y = -105 + 41p$.

Критерии оценивания:

За каждый правильно решённый пункт задания по одному баллу. Всего – 5 баллов.

Задача 3.

Решите в целых числах уравнение $3x + 4y + 7z = 2020$.

Ответ: $x = 3p + 4q - 2020, y = -4p - 3q + 2020, z = p$, где $p, q \epsilon Z$.

Критерии оценивания:

Правильное решение – 5 баллов.

Задача 4.

Докажите тождество: $1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Решение.

Базис индукции: 1 = (1 · 2 · 3)/6.

Шаг индукции. Пусть мы уже знаем, что равенство задачи верно для суммы $n - 1$ квадратов:

$$1^2 + 2^2 + ... + (n - 1)^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

(в правой части записано выражение из условия задачи, в котором n заменено на $n-1$). Прибавим к обеим частям число n^2. Получим, что сумма n квадратов равна

$$\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}+n^2=\frac{n[2n^2+3n+1]}{6}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

что и требовалось доказать.

Критерии оценивания:

Правильное решение – 5 баллов.

Задача 5.

Известно, что $x+\frac{1}{x}$ – целое число. Докажите, что $x^n+\frac{1}{x^n}$ – также целое при любом целом n.

Очевидно, достаточно доказать утверждение для неотрицательных n. Сделаем это по индукции.

База. Для $n = 0$ утверждение очевидно, а для $n = 1$ дано в условии.

Шаг индукции. Пусть утверждение уже доказано для всех чисел от 0 до n. Тогда число $x^{n+1}+\frac{1}{x^{n+1}}=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)-\left(x^{n-1}+\frac{1}{x^{n-1}}\right)$ – целое как разность двух целых чисел.

Критерии оценивания:

Правильное решение – 5 баллов.