Министерство образования, науки и молодёжной политики
Краснодарского края
Государственное бюджетное учреждение
дополнительного образования
Краснодарского края «Центр развития одарённости»

Ответы к контрольной работе № 3 по математике для учащихся 5 класса очно-заочного (с применением дистанционных образовательных технологий и электронного обучения) обучения (заочные курсы «Юниор»)

Составитель:
Невечеря Артём Павлович,
преподаватель кафедры
ФГБОУ ВО «КубГУ

Краснодар
2020

ОТВЕТЫ

Общие критерии оценивания

Всего 5 заданий. Каждое задание оценивается от 0 до 7 баллов в соответствии со следующими критериями:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
0	Решение неверное, продвижение отсутствует. Решение отсутствует.
0–1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
2–3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие при решении задачи.
3–4	Решение содержит существенные ошибки и пробелы в обоснованиях. После незначительных корректировок и соответствующих дополнений может стать полностью правильным.
5–6	Решение содержит незначительные ошибки или пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений и дополнений.
6–7	Верное решение. Имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
7	Полное верное решение.

Максимальную оценку за работу – **35 баллов** – участник получает при полном и корректном выполнении всех заданий.

Задание 1.

Решение:
Заметим, что $Д \neq 0$, так как Д – цифра старшего разряда числа. При этом $Д < 2$, в противном случае $843 \cdot ДОМ$ – шестизначное число.
Следовательно, $Д = 1$.
Из уравнения следует, что цифра младшего разряда в произведении $3 \cdot М$ равняется 1. Это возможно только в том случае, если $М = 7$.
Перебирая возможные значения для О получим ответ: $Д = 1$, $О = 0$, $М = 7$, $Г = 9$, $Р = 2$.
Ответ: $843 \cdot 107 = 90201$.
Критерии оценивания.
Правильный ответ – 7 баллов.

Задание 2.

Решение:
Здесь и далее под первой цифрой числа будет подразумеваться крайняя цифра

слева.
Для получения правильного ответа применим последовательность рассуждений, в котором каждый последующий вывод опирается на все предыдущие.

1. Заметим, что сумма двух последних цифр искомого числа равняется нулю, в противном случае сумма всех цифр числа не меньше 6, чего не может быть (так как сумма всех цифр в пятизначном числе должна равняться количеству нулей в нём).
2. Сумма последних трёх цифр не больше одного (в противном случае сумма всех цифр будет не меньше шести), а также не меньше одного (в противном случае сумма цифр числа будет не больше двух, а нулей в числе – не меньше трёх). Следовательно, сумма первых трёх цифр числа равняется 1.
3. Следовательно, третья цифра числа равняется 1.
4. Сумма цифр числа не может быть меньше 3 (в противном случае количество нулей будет больше суммы цифр числа).
5. Сумма цифр числа не может быть больше 3 (в противном случае нулей будет меньше суммы цифр).
6. Сумма цифр равняется 3.
7. Вышеприведённым утверждениям удовлетворят только два числа: 11100, 20100. Число 11100 не подходит, так как количество единиц не соответствует сумме последних четырёх цифр числа.

Таким образом, единственное решение задачи – 20100.
Ответ: 20100.
Критерии оценивания.
Доказано, что сумма последних двух цифр равняется 0 – 3 балла.
Правильный ответ – 7 баллов.

Задание 3.
Решение:
Заметим, что если увеличение числа на 1 изменяет только цифру младшего разряда числа, то чётность суммы цифр числа не изменится. Следовательно, цифра младшего разряда числа должна равняться 9.
Рассмотрим все натуральные числа $n < 100$, цифра разряда единиц в которых равняется 9: 9, 19, 29, 39, 49, 59, 69, 79, 89, 99. При увеличении данных чисел на 1 чётность их суммы цифр изменится только в случае $n = 99$.
Таким образом, числа 9, 19, 29, 39, 49, 59, 69, 79, 89 подходят под условие задачи.
Ответ: 9, 19, 29, 39, 49, 59, 69, 79, 89.
Критерии оценивания.
Доказано, что цифра младшего разряда числа n должна равняться 9 – 3 балла.
Правильный ответ – 7 баллов.

Задание 4.
Решение:
Пусть второй, третий, четвёртый и пятый элементы последовательности

равны, соответственно, a, b, c, d. Заметим, что $2 + a + b + c = a + b + c + d$. Следовательно, пятый элемент последовательности равен 2. Аналогично можно показать, что равны 5-й, 9-й, …, $(4k + 1)$-й элементы. Используя это утверждение, восстановим часть последовательности:

2, ?, ?, ?, **2**, 0, ?, ?, **2**, ?, 2, ?, **2**, ?, ?, ?, **2**, 0.

По тому же принципу доказываем эквивалентность элементов:

а) 2, 6, …, $(4k + 2)$, …;

б) 3, 7, …, $(4k + 3)$, …;

в) 4, 8, …, $4k$, …

Таким образом, записанная Андреем последовательность является последовательностью с повторениями, период которой равен 4.

Получаем:

2, **0**, **2**, ?, **2**, **0**, **2**, ?, **2**, **0**, **2**, ?, **2**, **0**, **2**, ?, **2**, **0**.

Так как сумма любых четырёх соседних элементов по условию равна 20, неизвестный элемент последовательности равен 16.

Ответ: 2, 0, 2, 16, 2, 0, 2, 16, 2, 0, 2, 16, 2, 0, 2, 16, 2, 0.

Критерии оценивания.

Получено следующее (или любое подобное) утверждение: 5-й элемент последовательности должен равняться 2 – 2 балла.

Корректно доказано, что выписанная Андреем последовательность является последовательностью с повторениями, период которой равен 4 – 6 баллов.

Правильный ответ – 7 баллов.

Задание 5.

Решение:

Применим шахматную (диагональную) раскраску к игровому полю (рис 1).

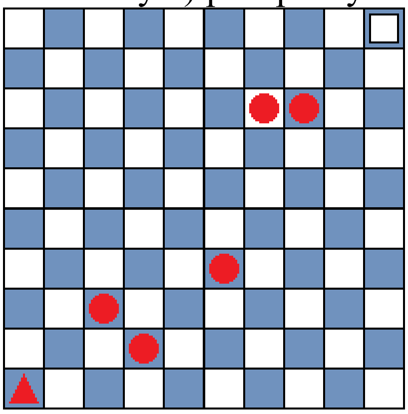

Рисунок 1.

Заметим, что за одно действие (два хода) игрок может переместить треугольную фишку только в клетку того же цвета. Следовательно, в конце любого действия игрока треугольная фишка окажется в синей клетке.

Таким образом, если круглые фишки разрешено подбирать только в начале *действия*, то игрок не сможет собрать их все.

Теперь пронумеруем строки (снизу-вверх) и столбцы (слева-направо) игрового поля числами от 1 до 10. Координаты треугольной фишки – её текущее расположение на поле – будем обозначать с помощью пары значений: номер

столбца x и номер строки y, в которых фишка находится – (x, y).
Заметим, что из координаты (x, y) фишка за одно действие может переместиться только в одну из следующих координат: $(x, y+2)$, $(x+1, y+1)$, $(x+2, y)$, $(x+1, y-1)$, $(x, y-2)$, $(x-1, y-1)$, $(x-2, y)$, $(x-1, y+1)$.
Таким образом, за одно действие сумма компонент координаты треугольной фишки может: увеличиться на 2; остаться той же; уменьшится 2.
В течение игры треугольная фишка должна переместиться из позиции (1, 1) в позицию (10, 10). Сумма компонент начальной позиции – 2, сумма компонент конечной – 20, следовательно, если не накладывать дополнительных ограничений, то такой переход можно осуществить за 9 действий.
Теперь игрок должен собрать все круглые фишки, подбирая их в начале *хода*, перемещая треугольную фишку на финишную позицию. Такое перемещение можно осуществить за минимальное число действий только в том случае, если координаты круглых фишек можно упорядочить по неубыванию одной компоненты так, чтобы значения другой компоненты тоже не убывали.
Рассмотрим круглые фишки на позициях (3, 3) и (4, 2). Их координаты невозможно упорядочить требуемым образом, следовательно, игрок не сможет за 9 действий дойти до финиша.
Приведём пример для 10 действий (рис. 2, цифрами обозначено положение треугольной фишки в конце действия с соответствующим номером).

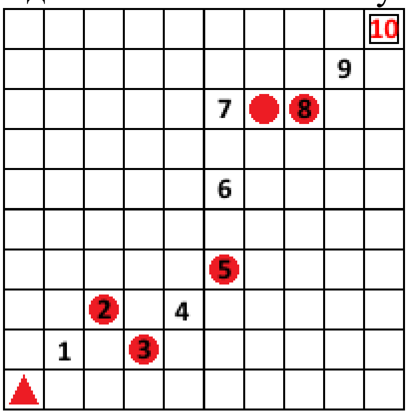

Рисунок 2.

Ответ: а) 10 действий (20 ходов); б) невозможно.
Критерии оценивания.
Приведён ответ для пункта «а» без доказательства или с некорректным доказательством – 1 балл.
Приведён ответ для пункта «б» без доказательства или с некорректным доказательством – 2 балла.
Корректный ответ с доказательством, пункт «а» – 4 балла.
Корректный ответ с доказательством, пункт «б» – 3 балла.

Примечания к критерия оценивания заданий 1 – 5. В зависимости от наличия / отсутствия каких-либо неучтённых в критериях продвижений при решении задачи, решение может быть оценено большим или меньшим количеством баллов.