Министерство образования, науки и молодёжной политики

Краснодарского края

Государственное бюджетное учреждение

дополнительного образования

Краснодарского края «Центр развития одарённости»

**Методические рекомендации к выполнению контрольной работы № 1 по математике для учащихся 8 класса заочных курсов «Юниор» очно-заочного обучения (с применением дистанционного образовательных технологий и электронного обучения)**

Составитель:

Кузнецов Егор Александрович,

преподаватель ФГБОУ ВО «КубГУ»

Краснодар

2019

**Аннотация.**

Данная методическая разработка является сборником контрольных работ и методических рекомендаций по их проведению для реализации дополнительной общеобразовательной общеразвивающей программы «Курс математики для начинающего олимпиадника (8 класс)». Сборник направлен на развитие интеллектуальных умений учащихся на основе формирования у ребенка умений управлять процессами творчества: фантазированием, пониманием закономерностей, решением сложных проблемных ситуаций.

***Введение.***

**Актуальность**

Проблема работы с одаренными учащимися чрезвычайно актуальна длясовременного российского общества. К школе предъявляются сегодня высокие требования. Именно поэтому так важно определить основные задачи и направления работы с одаренными детьми в системе дополнительного образования.

Одаренность — это системное, развивающееся в течение жизни качество психики, которое определяет возможность достижения человеком более высоких (необычных, незаурядных) результатов в одном или нескольких видах деятельности по сравнению с другими людьми.

Никакого особого «рецепта» по работе с одаренными детьми нет. По своей природной сути большинство детей талантливы. Беда в том, что не все из них об этом знают. Проблема «нераскрытости» детей заключается в том, что воспитание в семье не всегда помогает раскрыться личности ребенка, а система образовательного процесса в школе не позволяет «рассмотреть» особенности каждого ребенка. Учебный процесс в общеобразовательной школе предполагает, что ребенок должен соответствовать стандарту тех требований, которые к нему предъявляются. Таким образом, многогранность

и сложность явления одаренности определяет целесообразность существования разнообразных направлений, форм и методов работы с одаренными детьми.

Актуальность методической разработки определяется потребностью со стороны одарённых школьников на программы изучения математики, учебно-методические условия для реализации которых имеются на базе факультета математики и компьютерных наук КубГУ.

**Новизна:**

Характерной особенностью программы «Курс математики для начинающего олимпиадника (8 класс)» является интеграция основного и дополнительного образования. Новизна дополнительной общеобразовательной общеразвивающей программы состоит в том, что талантливые обучающиеся вовлекаются в учебную деятельность, основываясь не на традиционных школьных учебных методах работы, а на методах классического университетского образования, более соответствующего запросам учеников. Также содержание программы позволяет не только углубить интеллектуальные познания учеников, но и расширить и дополнить процесс их гражданского воспитания. При этом приоритет программы отдается развитию у учащихся знаний и навыков, позволяющих успешно выступать на муниципальном, региональном и заключительном этапах Всероссийской олимпиады школьников по математике.

**Цель:**

Целью данной методической разработки является обеспечение подготовки школьников к участию в олимпиадном движении по предмету Математика и углубленное изучение курса математики.

***Основная часть***

**ЗАДАНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ № 1**

**Задача 1.**

а) Докажите, что найдется число вида 111…11000..00, делящееся на 2019.

б) Докажите, что среди чисел, записываемых одними единицами, найдется число, делящееся на 2019.

**Задача 2.** На доске написаны числа 1, 2, 3, …, 2018. Разрешается стереть любые два числа a и b и вместо них написать число a + b + 1. Какое число может остаться на доске после 2017 таких операций?

**Задача 3.**

Найдите остатки от деления а) 2017 · 2018 · 2019 + 2019³ на 7; б) 9100 на 8; в) 7101 на 8; г) 132019 на 10; д) 102019 на 7.

**Задача 4.**

Докажите, что n³ + 2n делится на 3 при любом натуральном n.

**Задача 5.**

Каждый из семнадцати ученых переписывается с остальными. В их переписке речь идет лишь о трех темах. Каждая пара ученых переписывается друг с другом лишь по одной теме. Нужно доказать, что не менее трех ученых переписываются друг с другом по одной и той же теме.

**МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО МАТЕМАТИКЕ**

***Базовые идеи и методы решения задач****.*

Данная тема призвана познакомить учащихся с общими принципами и методами решения математических задач: рассмотрение частных случаев, разбиение на подзадачи, обобщение задачи, сведение задачи к более простой, изменение формулировки условия и т. д.

**Рекомендуемые материалы для закрепления раздела:**

*Канель-Белов А.Я., Ковальджи А.К. Как решают нестандартные задачи / Под ред. В.О.Бугаенко.– 4-е изд., стереотип. – М.: МЦНМО, 2008. – 96 c.*

***Принцип Дирихле.***

Утверждение «среди любых трех целых чисел найдутся два числа одной четности» кажется очевидным, также как и утверждение «среди 13 человек найдутся двое, родившиеся в один месяц». И то, и другое можно обосновать разбором случаев. Но более грамотным будет построить рассуждение от противного. Для второго утверждения это будет выглядеть так:

«Предположим, что не найдется двух таких человек. Тогда в каждый из 12 месяцев родилось не более одного человека. Значит, имеется всего не более 12 человек, что противоречит условию задачи: 12 < 13.»

Такие рассуждения очень часто встречаются при решении задач, поэтому их выделили в отдельное утверждение, называемое *принципом Дирихле*. Классическая формулировка звучит так: « Если (*n* + 1) кроликов сидят в n ящиках, то найдётся ящик, в котором сидит, по крайней мере, два кролика». Доказательство этого утверждения также строится от противного:

«Предположим, что в каждом ящике сидит менее двух кроликов (один или ни одного). Тогда во всех *n* ящиках в совокупности сидит не более *n* кроликов. Противоречие.»

Решение задачи с помощью принципа Дирихле сводится к выбору «кроликов» и «клеток». Иногда не совсем очевидно, кто в данной задаче являчется «кроликом», и что служит «клеткой».

Общая формулировка: «Если *n* кроликов сидят в *k* ящиках, то найдётся ящик, в котором сидят не меньше чем кроликов, и найдётся ящик, в котором сидят не больше чем кроликов». Пусть вас не смущает дробное число кроликов — в предыдущем случае получается, что в ящике не меньше кроликов, значит, не меньше двух.

Доказательство принципа Дирихле простое, но заслуживает внимания, поскольку похожие рассуждения часто встречаются.

Допустим, что в каждом ящике сидят меньше чем кроликов. Тогда во всех ящиках вместе кроликов меньше чем . Противоречие.

***Пример 1.*** В школе 400 учеников. Докажите, что хотя бы двое из них родились в один день года.

*Решение.* Всего в году бывает 366 дней. Назовём дни ящиками, а учеников — кроликами. Тогда в некотором ящике сидят не меньше кроликов, т. е. больше одного. Следовательно, не меньше двух.

Можно рассуждать от противного. Допустим, что каждый день отмечают день рождения не больше одного ученика, тогда всего учеников не больше 366. Противоречие.

***Пример 2.*** На собеседование пришли 65 школьников. Им предложили 3 контрольные работы. За каждую контрольную ставилась одна из оценок: 2, 3, 4 или 5. Верно ли, что найдутся два школьника, получившие одинаковые

оценки на всех контрольных?

*Решение.* Рассмотрим множество наборов из трёх оценок за соответствующие контрольные. Количество таких наборов равно 43 или 64 (4 возможности за каждую из трёх контрольных). Поскольку число учащихся больше 64, по принципу Дирихле каким-то двум учащимся соответствует один набор оценок.

**Типовые задачи**

1. a) Докажите, что в любой футбольной команде есть два игрока, которые родились в один и тот же день недели.

б) В ковре размером 4х4 метра моль проела 15 дырок. Докажите, что из него можно вырезать коврик размером 1х1 метр, не содержащий внутри себя дырок.

2. Внутри равностороннего треугольника со стороной 1 см расположено 5 точек. Докажите, что расстояние между некоторыми двумя из них меньше 0,5 см.

3. В лесу растет миллион елок. Известно, что на каждой из них не более 600000 иголок. Докажите, что в лесу найдутся две елки с одинаковым числом иголок.

4. Дано 12 целых чисел. Докажите, что из них можно выбрать 2, разность которых делится на 11.

5. Плоскость раскрашена в два цвета. Докажите, что найдутся две одноцветные точки на расстоянии 1 метр друг от друга.

6. Докажите, что в любом наборе из n+1 чисел найдутся два числа, разность которых делится на n.

7. Каждая клетка таблицы 2019х2019 покрашена в один из 2018 цветов. За ход можно взять строку или столбец и, если там есть две клетки одного цвета, перекрасить эту строку или столбец в этот цвет. Можно ли за несколько ходов покрасить всю таблицу в один цвет?

8. На Земле океан занимает больше половины площади поверхности. Докажите, что в мировом океане можно указать две диаметрально противоположные точки.

9. Докажите, что в любой компании найдутся два человека, имеющие одинаковое число знакомых в данной компании.

10. Докажите, что среди любых 10 целых чисел найдутся одно или несколько, сумма которых делится на 10.

11. В воздушном пространстве находятся облака. Оказалось, что пространство можно разбить десятью плоскостями на части так, чтобы в каждой из частей находилось не более одного облака. Через какое наибольшее число облаков мог пролететь самолет, придерживаясь прямолинейного курса?

**Рекомендуемые материалы для закрепления раздела:**

*Генкин С.А., Итенберг И.В., Фомин Д.В., Ленинградские математические кружки, глава 5. Принцип Дирихле*

*Прасолов В.В., Задачи по планиметрии, глава 21. Принцип Дирихле*

***Инварианты***

*Инвариант* — величина, которая не изменяется в результате некоторых операций (например, разрезание и перестановка частей фигур не меняет суммарной площади). Если инвариант различает два положения, то от одного нельзя перейти к другому. В качестве инварианта может использоваться *чётность* или *раскраска*. В задачах про сумму цифр используются остатки от деления на 3 или 9. *Полуинвариант* — величина, изменяющаяся только в одну сторону (т. е. которая может только увеличиваться или только уменьшаться). Понятие полуинварианта часто используется при доказательствах остановки процессов.

**Пример 1.** На чудо-яблоне растут бананы и ананасы. За один раз разрешается сорвать с неё два плода. Если сорвать два банана или два ананаса, то вырастет ещё один ананас, а если сорвать один банан и один ананас, то вырастет один банан. В итоге остался один плод. Какой это плод, если известно, сколько бананов и ананасов росло вначале?

*Решение.* Чётность числа бананов не меняется, поэтому, если число бананов было чётным, то оставшийся плод — ананас, если число бананов было нечётным, то — банан.

**Пример 2**. В одной клетке квадратной таблицы 4 × 4 стоит знак минус, а в остальных стоят плюсы. Разрешается одновременно менять знак во всех клетках, расположенных в одной строке или в одном столбце. Докажите, что, сколько

бы мы ни проводили таких перемен знака, нам не удастся получить таблицу из одних плюсов.

*Решение.* Заменим знак «+» на число 1 и знак «−» на число −1. Заметим, что *произведение всех чисел в таблице* не меняется при смене знака у всех чисел столбца или строки. В начальном положении это произведение равно −1, а в

таблице из одних плюсов +1, чем и доказана невозможность перехода.

**Пример 3**. На прямой стоят две фишки: слева красная, справа синяя. Разрешается производить любую из двух операций: вставку двух фишек одного цвета подряд (между фишками или с краю) и удаление пары соседних одноцветных фишек (между которыми нет других фишек). Можно ли с помощью таких операций оставить на прямой ровно две фишки: слева синюю, а справа красную?

*Решение.* Рассмотрим число разноцветных пар (не только соседних), где левая фишка красная, и заметим, что чётность этого показателя не меняется. Но в исходной ситуации наш показатель равен 1, а в желаемой ситуации — нулю. Поэтому перейти к желаемой ситуации невозможно.

**Типовые задачи**

1. Может ли шахматный слон за миллион ходов попасть с поля а1 на поле а8?

2. Разменный автомат меняет одну монету на пять других. Можно ли с его помощью разменять одну монету на 26 монет?

3. Дядька Черномор написал на листке бумаги число 20. Тридцать три богатыря передают листок друг другу, и каждый или прибавляет к числу или отнимает от него единицу. Может ли в результате получиться число 10?

4. Набор (b1, …, b7) является перестановкой набора целых чисел (a1, …, a7). Докажите, что число (a1 − b1) · … · (a7 − b7) — чётное.

5. Можно ли разрезать выпуклый 17-угольник на 14 треугольников?

6. На шести ёлках сидят шесть чижей, на каждой ёлке — по чижу. Ёлки растут в ряд с интервалами в 10 метров. Если какой-то чиж перелетает с одной ёлки на другую, то какой-то другой чиж перелетает на столько же метров в противоположном направлении. Могут ли все чижи собраться на одной ёлке? А если чижей и ёлок семь?

7. Дно прямоугольной коробки вымощено плитками 1×4 и 2×2. Плитки высыпали из коробки и одна плитка 2×2 потерялась. Её заменили на плитку 1×4. Можно ли теперь замостить дно коробки?

8. В вершинах куба расставлены числа: 7 нулей и одна единица. За один ход разрешается прибавить по единице к числам в концах любого ребра куба. Можно ли добиться того, чтобы все числа стали равными? А можно ли добиться того, чтобы все числа делились на 3?

9. На острове Серобуромалин обитают 13 серых, 15 бурых и 17 малиновых хамелеонов. Если встречаются два хамелеона разного цвета, то они одновременно меняют свой цвет на третий. Может ли случиться так, что через некоторое время все хамелеоны будут одного цвета?

10. Бумажный треугольник с углами 20°, 20°, 140° разрезается по одной из своих биссектрис на два треугольника, один из которых также разрезается по биссектрисе, и так далее. Может ли после нескольких разрезов получиться треугольник, подобный исходному?

11. Числа от 1 до 19 расположены в порядке возрастания. Разрешается выбрать любые три стоящих подряд числа и переставить их циклически (то есть, если вначале было a, b, c, то стало b, c, a). Можно ли расположить числа в порядке убывания?

**Рекомендуемые материалы для закрепления раздела:**

*Генкин С.А., Итенберг И.В., Фомин Д.В., Ленинградские математические кружки, глава 12. Инвариант*

*Прасолов В.В., Задачи по планиметрии, глава 23. Делимость, инварианты, раскраски, параграф 3. Инварианты*

***Делимость и остатки.*** ***Простые и составные числа.***

Если числа *a* и *b* дают одинаковые остатки при делении на число *m*, то говорят, что *a сравнимо* с *b* по модулю *m* и записывают

*a* ≡ *b*(mod *m*)

Два числа *a* и *b* сравнимы по модулю *m* тогда и только тогда, когда их разность делится на *m*.

Сравнения можно складывать и умножать. Если *a* ≡ *b* (mod *m*) и *c* ≡ *d* (mod *m*), n – произвольное целое положительное число, то *a+c* ≡ *b+d* (mod *m*), *ac ≡ bd* (mod *m*) и *an* ≡ *bn* (mod *m*). Таким образом определяется *арифметика остатков* или *арифметика вычетов*.

В случае если *m* = 10 приведённое утверждение особенно наглядно: чтобы найти последнюю цифру десятичной записи суммы (произведения), достаточно сложить (перемножить) последние цифры слагаемых (сомножителей) и взять последнюю цифру результата.

Остаток может выступать в роли инварианта (например, остаток от деления на 9 в задачах про сумму цифр).

**Пример 1.** Докажите, что число *n3 − n* делится на 6 при всех целых *n*.

*Решение.* Разложим данное выражение на множители:

*n3 − n = (n − 1)n(n + 1)*

Мы получили произведение трёх последовательных целых чисел. Одно из них делится на 3, поэтому произведение делится на 3. По крайней мере одно из трёх последовательных чисел чётно, поэтому произведение чётно. Число, делящееся на 2 и 3, делится на 6.

**Пример 2.** Докажите, что существует бесконечно много чисел, не представимых в виде суммы трёх квадратов.

*Решение.* Квадрат целого числа при делении на 8 даёт остаток 0, 1 или 4. Чтобы убедиться в этом, достаточно проверить квадраты всевозможных остатков от деления на 8 – числа от 0 до 8. Поэтому сумма трёх квадратов не может иметь остаток 7.

**Пример 3.** Докажите, что число, в десятичной записи которого участвуют три единицы и несколько нулей, не может быть квадратом.

*Решение.* Если такое число существует, то оно делится на 3, но не делится на 9 (по признакам делимости на 3 и 9). Но если число делится на 3 и является полным квадратом, то оно делится на 9. Противоречие.

**Типовые задачи**

1. Найдите остатки от деления а) 4571645712423762319747 на 10;

б) 2024 на 11; в) 2 на 5; г) −10 на 3.

2. Найдите остатки от деления а) 2017 · 2018 · 2019 + 2019³ на 7; б) 9100 на 8; в) 7101 на 8; г) 132019 на 10; д) 102019 на 7.

3. На какую цифру оканчивается число ?

4. Докажите, что n5 + 4n делится на 5 при любом натуральном n.

5. Докажите, что n² + 1 не делится на 3 ни при каком натуральном n.

6. Докажите, что n³ + 2 не делится на 9 ни при каком натуральном n.

7. Докажите, что n³ − n делится на 24 при любом нечетном n.

8. Натуральные числа x, y и z таковы, что x² + y² = z². Докажите, что хотя бы одно из этих чисел делится на три.

9. Сумма квадратов двух натуральных чисел делится на 21. Докажите, что эта сумма делится на 441.

10. Сумма трех натуральных чисел делится на 6. Докажите, что сумма их кубов тоже делится на 6.

11. Докажите, что сумма квадратов трех натуральных чисел не может иметь остаток 7 при делении на 8.

12. Сумма квадратов трех натуральных чисел делится на 9. Докажите, что из этих чисел можно выбрать два, разность квадратов которых делится на 9.

13. Дядька Черномор написал на листке бумаги число 20. Тридцать три богатыря передают листок друг другу по цепочке, и каждый или прибавляет к числу или отнимает от него единицу. Может ли в результате получиться число 10?

14. а) Число при делении на 8 дает остаток 3. Какой остаток оно дает при делении на 4?

б) Число при делении на 4 дает остаток 3. Какие остатки оно может давать при делении на 8?

в) Число при делении на 15 дает остаток 7. Какой остаток оно дает при делении на 5?

15. Сформулируйте и докажите признаки делимости на 2 и на 5. Верны ли аналогичные признаки для других однозначных чисел?

16. Чтобы доказать, что число 1601 простое, его стали последовательно делить на 2, 3 и т. д. На каком числе можно остановиться?

17. Ковбой Джо приобрел в салуне несколько бутылок Кока-Колы по 1 доллару 40 центов за штуку, несколько сэндвичей по 35 центов и бифштекс за 2 доллара 80 центов. Бармен потребовал 20 долларов 50 центов, на что Джо вытащил револьвер. Бармен пересчитал и исправил ошибку. Как Джо понял, что его обсчитали?

18. У числа переставили цифры и вычли из исходного. Докажите, что полученная разность делится на 9.

19. Докажите, что число, состоящее из трех единиц и нескольких девяток (в любом порядке), не является точным квадратом (т. е. квадратом целого числа).

20. Докажите, что среди любых *n* + 1 натуральных чисел найдутся два, разность которых делится на *n*.

21. Докажите, что если к произвольному числу приписать число, записанное теми же цифрами в обратном порядке, то результат будет делиться на 11.

22. У числа 82019 вычислили сумму цифр, у полученного числа снова вычислили сумму цифр и т. д., пока не получилось однозначное число. Какое?

23. Докажите, что из любых *n* натуральных чисел, не кратных *n*, можно выбрать несколько, сумма которых делится на *n*.

24. Докажите, что для любого натурального *n* существует *n* подряд идущих составных чисел.

25. 15! = 130\*674368\*\*\*. Найдите цифры, заменённые звёздочками.

**Рекомендуемые материалы для закрепления раздела:**

*Генкин С.А., Итенберг И.В., Фомин Д.В. Ленинградские математические кружки*

*Горбачёв Н.В. Сборник олимпиадных задач по математике*

*Канель-Белов А.Я., Ковальджи А.К. Как решают нестандартные задачи*

***Графы***

Во многих ситуациях удобно изображать объекты точками, а связи между ними - линиями или стрелками. Такой способ представления называется *графом*. Например, схема метро - это граф. Точки называют *вершинами* графа, а линии — *ребрами*.

Вершину называют *чётной*, если из неё выходит чётное число рёбер и *нечётной* в противном случае. Граф называют *связным*, если между любыми вершинами существует путь, состоящий из рёбер графа, *ориентированным* - если на каждом ребре указано направление, *плоским* - если он нарисован на плоскости и его ребра не пересекаются (во внутренних точках).

При решении многих олимпиадных задач используются следующие утверждения, относящиеся к обходу рёбер графа:

1) если в графе больше двух нечётных вершин, то его правильный обход (т. е. обход, при котором каждое ребро проходится ровно один раз) невозможен;

2) для всякого чётного связного графа существует правильный обход, который можно начать с любой вершины и который обязательно кончается в той же вершине, с которой начался;

3) если в связном графе ровно две нечётные вершины, то существует правильный обход, причём в одной из них он начинается, а в другой - кончается;

4) в любом графе количество нечётных вершин чётно.

**Типовые задачи**

1. В деревне 9 домов. Известно, что у Гоши соседи Иван и Роман, Максим сосед Ивану и Михаилу, Виктор — Алексею и Андрею, а также по соседству живут Константин с Андреем, Иван с Михаилом, Константин с Алексеем, Михаил с Романом и больше соседей в означенной деревне нет (соседними считаются дворы, у которых есть общий участок забора). Может ли Гоша огородами пробраться к Андрею за яблоками?

2. В стране Цифра есть 9 городов с названиями 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Путешественник обнаружил, что два города соединены авиалинией в том и только в том случае, если двузначное число, составленное из цифр-названий этих городов, делится на 3. Можно ли добраться из города 1 в город 9?

3. В некотором государстве 6 городов и 10 автодорог, каждая из которых связывает какие-то два города. Между городами устанавливается авиационное сообщение, исходя из принципа экономии: авиационная линия между двумя городами устанавливается тогда и только тогда, когда автомобильная дорога между этими городами отсутствует. Сколько авиалиний будет проведено?

**Степень вершины** — количество ребер, выходящих из данной вершины.

4. В стране 1329 городов, из каждого выходит по 4 дороги. Сколько всего дорог в стране?

5. Докажите, что не существует графа с пятью вершинами, степени которых равны 4, 4, 4, 4, 2.

6. Вася считает, что в его классе у всех разное число друзей-одноклассников. Не ошибается ли он?

7. Иван утверждает, что среди любых а) четырёх; б) пяти; в) шести человек обязательно найдётся либо трое знакомых друг с другом, либо трое незнакомых. Не завирается ли он?

8. Петя заметил, что у всех его 25 одноклассников различное число друзей в этом классе. Сколько друзей у Пети? (Укажите все решения.)

9. Докажите, что существует граф с 2n вершинами, степени которых равны 1, 1, 2, 2, ..., n, n.

10. Докажите, что не существует многогранника, у которого было бы ровно семь ребер.

11. Верно ли, что два графа изоморфны, если

а) у них по 10 вершин, степень каждой из которых равна 9?

б) у них по 8 вершин, степень каждой из которых равна 3?

в) они связны, без циклов и содержат по 6 ребер?

12. В некотором городе на любом перекрестке сходятся ровно 3 улицы. Улицы раскрашены в три цвета так, что на каждом перекрестке сходятся улицы трех разных цветов. Из города выходят три дороги. Докажите, что они имеют разные цвета.

**Рекомендуемые материалы для закрепления раздела:**

*Генкин С.А., Итенберг И.В., Фомин Д.В., Ленинградские математические кружки, глава 6. Графы-1*

*КнГенкин С.А., Итенберг И.В., Фомин Д.В., Ленинградские математические кружки, глава 13. Графы-2*

*Иванов С.В., Математический кружок, глава 5. Графы*

***НОД и НОК. Алгоритм Евклида.***

Алгоритм Евклида позволяет находить наибольший общий делитель чисел, решать линейные уравнения в целых числах. Алгоритм основан на следующем факте: «*Если при делении числа a на b получается остаток r, то* НОД(*a*;*b*) = НОД(*b*;*r*)».

Применение алгоритма Евклида заключается в последовательном делении с остатком. Сначала мы делим большее из двух чисел на меньшее. На каждом следующем шагу мы делим число, которое на предыдущем шагу было делителем, на число, которое на предыдущем шагу было остатком. Так поступаем до тех пор, пока не получим нулевой остаток. Это обязательно произойдёт через конечное число шагов, поскольку остатки всё время уменьшаются. Последний ненулевой остаток и будет наибольшим общим делителем исходных чисел.

Отметим, что этот алгоритм может быть применён для нахождения наибольшего общего делителя не только чисел, но также многочленов и других объектов более общей природы.

**Типовые задачи**

1. Докажите, что НОД не меняется при замене пары (*a*, *b*) на пару (*a*, *b* + *ka*) (для любого целого числа *k*).
2. Найдите а) НОД (*n*, *n*+ 1); б) НОД (*n*, *n*+ 2); в) НОД (*n*+ 1, *n*2).
3. Чему может быть равен НОД (*x+y*, *x−y*), если НОД (*x, y*) = 1?
4. Найдите а) НОД (6188, 4709); б) НОД (1597, 2584);в) НОД (*x*n−1, *x*m−1).
5. Обозначим через *Fn n*-ое число Леонардо Пизанского (более известные как **числа Фибоначчи**), т.е. *F1* = 1, *F2* = 1, а для каждого *n* ≥ 3 число *Fn* вычисляется по формуле *Fn* = *Fn − 1* + *Fn − 2*. Докажите, что (*Fn*, *Fn − 1*) = 1.
6. Пусть необходимо определить наибольший общий делитель двух натуральных чисел *a = r0* и *b = r1*, *r0 > r1*. Произведем несколько делений с остатком:

*r0 = q1 · r1 + r2*;

*r1 = q2 · r2 + r3*;

...

*ri = qi + 1 · ri + 1 + ri + 2*;

...

*rn = qn + 1 · rn + 1 + rn + 2,* где *rn + 2* = 0.

Тогда согласно алгоритму Евклида НОД(*r0, r1*) = *rn + 1*.

Докажите, что все числа *r*0, *r*1, *r*2, ..., *rn*, *rn* + 1 можно представить в виде   
*m · a + n · b* для некоторых целых *m* и *n*.

*Замечание.* Следствием из предыдущей задачи является **теорема о линейном представлении НОД**: пусть *d = (a, b)*, тогда существуют такие целые *m* и *n*, что *m · a + n · b = d.*

1. Найдите наибольший общий делитель чисел 34 и 55, используя алгоритм Евклида. С помощью алгоритма Евклида найдите линейное представление НОД чисел 34 и 55.
2. Хулиган Ваня отобрал у милой девочки Маши открытку размерами *m × n* сантиметров и начал ее резать. Каждый раз он отрезает от открытки квадрат с максимально возможной стороной. Преподаватель отобрал у хулигана Вани остаток открытки, который имеет форму квадрата. С какой стороной?
3. Решите уравнение в натуральных числах 7x − 11y = 1.
4. На прямой, в точке 0, сидит блоха. Каждый момент времени она прыгает в любом направлении (взад и вперед) на 2010 или 1447. В каких точках она может оказаться?
5. Руководство Малого Матфака выпустило в обращение купюры достоинством 65 и 999 ммфников. a) Докажите, что этими купюрами можно заплатить любую сумму денег (возможно, со сдачей). b) Докажите, что любую сумму большую 1 000 000 ммфников можно заплатить этими купюрами без сдачи.

**Рекомендуемые материалы для закрепления раздела:**

*Алфутова Н.Б., Устинов А.В., Алгебра и теория чисел, глава 3. Алгоритм Евклида и основная теорема арифметики, параграф 2.*

***Математические игры***

Под понятием *математической игры* мы понимаем игру двух соперников, обладающую следующим свойством. В каждый момент игры состояние характеризуется *позицией*, которая может изменяться только в зависимости от ходов игроков. Для каждого из игроков некоторые позиции объявляются выигрышными. Добиться выигрышной для себя позиции и есть цель каждого. Иногда игры допускают ничью. Это означает, что ни один из игроков не может добиться выигрышной для него позиции, или некоторые позиции объявлены ничейными.

Например, шахматы, шашки, крестики-нолики являются математическими играми. А игры в кости, домино, большинство карточных игр математическими играми не являются, так как состояние игры зависит не только от ходов соперника, но и от расклада или результата бросания кости.

В математических играх существуют понятия *выигрышной стратегии*, т. е. набора правил (можно сказать, инструкции или алгоритма), следуя которым, один из игроков обязательно выиграет (не зависимо от того, как играет его соперник), и *ничейной стратегии*, следуя которой один из игроков обязательно добьётся либо выигрыша, либо ничьей.

В любой математической игре существует либо выигрышная стратегия для одного из игроков, либо ничейные стратегии для обоих (если игра допускает ничью). В зависимости от этого игра называется выигрышной для первого или второго игрока, или ничейной.

Например крестики-нолики (на доске 3 × 3) являются ничейной игрой. К какому из перечисленных случаев относятся шахматы и шашки неизвестно. Хотя стратегия (либо выигрышная, либо ничейная) в этих играх существует, она не найдена, поэтому соревнования по этим играм пока представляют интерес.

*Соответствие.* Наличие удачного ответного хода (может обеспечиваться симметрией, разбиением на пары, дополнением числа).

*Решение с конца.* Последовательно определяются позиции, выигрышные и проигрышные для начинающего. Очередная позиция являются выигрышной, если из неё можно получить ранее определённую проигрышную позицию, и является проигрышной, если любой ход из неё ведёт к попаданию в ранее определённую выигрышную позицию.

*Передача хода.* Если мы можем воспользоваться стратегией противника, то наши дела не хуже чем у него. Например, выигрыш (или ничья) обеспечивается, когда можно по своему желанию попасть в некоторую позицию либо заставить противника попасть в неё.

**Типовые задачи**

1. Есть куча из *n* спичек. Разрешается брать от 1 до 10 спичек, выигрывает взявший последнюю спичку. При каких *n* выигрывает начинающий?

2. Первый называет целое число, затем второй называет ещё одно. Если сумма чисел чётна, выигрывает первый, если нечётна - второй. Кто выигрывает при правильной игре?

3. (Продолжение) Тот же вопрос, если вместо суммы берут произведение чисел. Кто выигрывает при правильной игре?

4. Дан выпуклый n-угольник. Игроки по очереди проводят в нём диагонали, не пересекая проведённых ранее (во внутренних точках). Тот, кто не может сделать ход, проигрывает. (Это случится, когда многоугольник будет разрезан на треугольники.)

5. Шоколадка представляет собой прямоугольник 5 × 8, разделённый углублениями на 40 квадратиков. Двое по очереди разламывают её на части по углублениям: за один ход можно разломить любой из кусков (больший одного квадратика) на два. Кто не может сделать хода (все куски уже разломаны), проигрывает.

6. В крайних клетках полоски 1 × 20 стоят белая и чёрная шашки. Двое по очереди передвигают свою шашку на одну или две клетки вперед или назад, если это возможно (перепрыгивать через шашку нельзя). Проигрывает тот, кто не может двинуть свою шашку. Кто выигрывает при правильной игре?

7. Двое игроков пишут двадцатизначное число слева направо, по очереди приписывая к нему по одной цифре. Первый игрок выигрывает, если полученное число не делится на 7, второй - если делится.

8. Что будет, если в предыдущей игре заменить 7 на 13?

9. На доске написано число 60. За один ход разрешается уменьшить число на любой из его целых положительных делителей (в том числе на единицу или на само это число). Если при этом получается нуль, игрок проиграл.

10. Двое играют в такую игру. Первый называет любое натуральное число от 2 до 9, второй умножает его на любое натуральное число от 2 до 9, первый умножает результат на любое натуральное число от 2 до 9 и т.д. Выигрывает тот, у кого впервые получится число больше 1000.

11. На столе лежат две кучки спичек. Игроки ходят по очереди. За один ход можно взять любое число спичек (1;2;3;…) из одной из кучек (по выбору игрока). При этом не разрешается оставлять поровну спичек в кучках (за исключением случая, когда спичек не осталось вовсе). Кто не может сделать ход, проигрывает.

12. Часы показывают полдень. Двое играющих по очереди переводят часовую стрелку на два или три часа вперёд. Если после хода игрока стрелка указывает на 6, он выиграл.

13. Есть две кучки конфет по m и n конфет (числа m и n - целые положительные). Игроки ходят по очереди. Делая ход, игрок съедает все конфеты из одной кучки, а другую кучку делит на две (по своему выбору; в каждой из них должно остаться хотя бы по конфете). Если сделать ход нельзя (это бывает, когда в обеих кучках по одной конфете), он проиграл.

14. Игра Ним. На столе лежат несколько кучек камней. Двое играющих поочерёдно берут камни из этих кучек. За один ход можно взять любое число камней, но только из одной кучки. Кто не может сделать ход, проигрывает (другими словами, выигрывает тот, кто заберёт последний камень).

15. Двое игроков кладут одинаковые круглые монеты на прямоугольный стол; монеты могут свешиваться за край (но не должны падать) и не могут перекрываться. Кто не может положить монету, проигрывает. (Сдвигать ранее положенные монеты нельзя.)

16. На квадратную доску 8 × 8 двое по очереди ставят коней на поля, не находящиеся под боем ранее поставленных (все равно кем) коней. Кто выигрывает при правильной игре - первый или второй?

17. Двое игроков ставят крестики и нолики на бесконечной клетчатой бумаге, причём на каждый крестик первого игрока второй отвечает 100 ноликами. Докажите, что первый может добиться, чтобы некоторые четыре крестика образовали квадрат (со сторонами, параллельными линиям клеток).

**Рекомендуемые материалы для закрепления раздела:**

*Генкин С.А., Итенберг И.В., Фомин Д.В., Ленинградские математические кружки, глава 8. Игры*