

## Треугольник Паскаля. Бином Ньютона

### Обучающие видеозанятия

#### Канал GetAClass - Просто математика

1) Треугольник Паскаля. Построение «сверху вниз»

<https://youtu.be/ObhpfZgZIAk>

2) Треугольник Паскаля 2. Свойства <https://youtu.be/RTG0ePEkcEY>

3) Треугольник Паскаля 3. Комбинаторика [https://youtu.be/\\_nvI1QaRjMQ](https://youtu.be/_nvI1QaRjMQ)

4) Треугольник Паскаля 4. Формула Бинома [https://youtu.be/WJ\\_ml-Aixj4](https://youtu.be/WJ_ml-Aixj4)

**Райгородский А.М.** Теоремы и числе сочетаний. Бином Ньютона (видеолекция) <https://lectoriy.mipt.ru/lecture/Maths-CombBasics-L02-Raygorodskiy-150617.01>

**Райгородский А.М.** Тождества с участием биномиальных коэффициентов (видеолекция) <https://lectoriy.mipt.ru/lecture/Maths-CombBasics-L03-Raygorodskiy-150618.01>

### Практические задания. Треугольник Паскаля

Построим (бесконечный) равнобедренный треугольник из натуральных чисел по следующим правилам:

- в вершине и вдоль боковых сторон стоят единицы;
- в каждой следующей строке на одно число больше, чем в предыдущей;
- каждое число, кроме уже написанных единиц, равно сумме двух чисел, стоящих в предыдущей строке чуть левее и чуть правее.

Получим такой треугольник:

```
      1
     1 1
    1 2 1
   1 3 3 1
  1 4 6 4 1
 1 5 10 10 5 1
... ..
```

1. Выпишите треугольник Паскаля до десятой строки включительно (первой считаем строку, состоящую из двух единиц).
2. Сколько чисел в 2014-й строке треугольника Паскаля?
3. Докажите, что в каждой строке треугольника Паскаля числа до середины идут по возрастанию, а от середины — по убыванию.  
(Подсказка: докажите, что если это верно для строки с номером  $n$ , то это верно и для строки с номером  $n + 1$ .)
4. а) Встречается ли в треугольнике Паскаля число 2014?  
б) Сколько раз в треугольнике Паскаля встречается число 10?  
в) Приведите пример натурального числа, большего единицы, которое встречается в треугольнике Паскаля больше четырёх раз.
5. а) Во сколько раз сумма чисел в шестой строке треугольника Паскаля больше суммы чисел в его пятой строке?  
б) Тот же вопрос про 2014-ю и 2015-ю строки.

- 6 а) Поставим знаки «+» и «-» между числами в 99-й строке треугольника Паскаля. Между первым и вторым числом поставим знак «-», между вторым и третьим «+», между третьим и четвёртым «-», потом опять «+», и так далее. Докажите, что значение полученного выражения равно нулю.
- б) То же верно и для 100-й строки. Докажите!
- 7 Сколькими способами, двигаясь по таблице (см. рисунок ниже) от буквы к букве, можно прочитать слово МЕХМАТ? От каждой буквы можно переходить только к букве, стоящей в следующей строке чуть правее или чуть левее.

```

      М
     Е Е
    Х Х Х
   М М М М
  А А А А А
 Т Т Т Т Т Т

```

- 8 Чему равна сумма чисел, стоящих:
- а) в третьей строке;
- б) в четвёртой строке;
- в) в седьмой строке;
- г) в  $n$ -й строке треугольника Паскаля?
- 9 Будем двигаться по треугольнику Паскаля по тем же правилам, что в задаче 7. Докажите, что количество способов дойти по таким правилам от самой верхней единицы до любого числа  $n$  в треугольнике Паскаля в точности равно  $n$ .
- 10 а) Какие строки треугольника Паскаля состоят целиком из чётных чисел (не считая единиц в начале и конце строки)?
- б) А какие целиком из нечётных чисел?

Источник: <http://mmmf.msu.ru/archive/20142015/z8/7.html>

## Практические задания. Бином Ньютона

**Определение.** Число способов выбрать из  $n$  различных предметов  $k$  различных предметов, если порядок, в котором они выбираются, неважен, называется *числом сочетаний из  $n$  по  $k$*  и обозначается  $C_n^k$  (читается «цэ из эн по ка»).

**Теорема 1.** В треугольнике Паскаля в  $n$ -й строке на  $k$ -м слева месте стоит число  $C_n^k$  (Единица стоит на нулевом месте.)

**Теорема 2** (бином Ньютона). Если раскрыть скобки и привести подобные в выражении  $(a + b)^n$ , то для всех  $0 \leq k \leq n$  коэффициент при  $a^k b^{n-k}$  будет равен  $C_n^k$ :

$$(a + b)^n = C_n^0 a^0 b^n + C_n^1 a^1 b^{n-1} + C_n^2 a^2 b^{n-2} + \dots + C_n^{n-1} a^{n-1} b^1 + C_n^n a^n b^0.$$

- С помощью теорем 1 и 2 раскройте скобки и приведите подобные в выражении  $(a + b)^7$ .
- Почему числа  $11^2 = 121$  и  $11^3 = 1331$  похожи на строчки треугольника Паскаля? Чему равно  $11^4$ ?

3. С помощью теорем 1 и 2 вычислите без помощи калькулятора и умножения в столбик:
- $21^4$ ;
  - $19^4$ .
4. Докажите, что  $C_n^k = C_n^{n-k}$ , с помощью:
- определения;
  - теоремы 1;
  - теоремы 2.

Подсказка

**Подсказка.**  $(a + b)^n = (b + a)^n$ .

5. С помощью теоремы 2 докажите, что:
- $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 \dots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$ ;
  - $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \dots + (-1)^n C_n^n = 0$ ;
  - $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$ ;
  - $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \dots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$ .

Подсказки

**Подсказки.**  $1 + 1 = 2$ ;  $1 - 1 = 0$ ;  $(a + b)^{n+1} = (a + b)^n (a + b)$ ;  $(a + b)^{2n} = (a + b)^n (a + b)^n$ .

6. В разложении выражения  $(x + y)^n$  с помощью биннома Ньютона второй член равен 240, третий 720, а четвёртый 1080. Найдите  $x$ ,  $y$  и  $n$ .
7. Докажите теорему 1.

Идея доказательства

**Идея доказательства.** Будем двигаться по треугольнику Паскаля, начиная с самой верхней единицы и каждым шагом переходя к числу, стоящему в следующей строке чуть правее или чуть левее. Чтобы дойти до  $k$ -го числа в  $n$ -й строке, нужно сделать  $k$  шагов вправо и  $n - k$  шагов влево. Теперь можно воспользоваться задачей 9 предыдущего занятия.

8. Докажите теорему 2.

Схема доказательства

**Схема доказательства.** (1) Докажите теорему для  $n = 0$  и  $n = 1$ .  
 (2) Пусть теорема уже доказана для  $n = m$ ; пользуясь теоремой 1 и равенством  $(a + b)^{m+1} = (a + b)^m(a + b)$ , докажите её теперь и для  $n = m + 1$ .

Источник: <http://mmmf.msu.ru/archive/20142015/z8/8.html>