СПЕЦКУРСЫ

ПО МАТЕМАТИКЕ

в рамках осенней профильной смены «Будущие интеллектуальные лидеры Кубани»

Анапа

2017 год

**Комбинаторика**

1.

Сколько способов добраться из города A в город C (если нельзя дважды посещать один город)?



2.а)

В магазине "Все для чая" есть 5 разных чашек и 3 разных блюдца. Сколькими способами можно купить чашку с блюдцем?

б)

В магазине есть еще 4 чайные ложки. Сколькими способами можно купить комплект из чашки, блюдца и ложки?

в)

В магазине по-прежнему продается 5 чашек, 3 блюдца и 4 чайные ложки. Сколькими способами можно купить два различных предмета?

3.

Сколько существует пятизначных чисел? А сколько пятизначных, состоящих только из чётных цифр?

4.

Сколькими способами можно прочитать в таблице слово **а)** КРОНА; **б)** КОРЕНЬ, начиная с буквы "K" и двигаясь вправо или вниз?



5 .а)

Cколькими способами можно выбрать из класса в 30 человек двух дежурных?

б)

Сколько способов выбрать из того же класса старосту и его заместителя?

6.

Нужно подключить к сети люстру с семью лампочками так, чтобы можно было зажигать любое число лампочек от одной до семи. Можно ли это сделать, используя только три выключателя? А если люстра с восемью лампочками? А с девятью?

7.

 30 человек голосуют по 5 предложениям. Сколькими способами могут распределиться голоса, если каждый голосует только за одно предложение и учитывается лишь количество голосов, поданных за каждое предложение?

8.

В Москве 7 высотных зданий. Если смотреть на них издалека, они в каком-то порядке располагаются на линии горизонта. Если смотреть из разных точек, будут разные способы расстановки. Турист едет по московской кольцевой автодороге и постоянно смотрит на высотки. Увидит ли он все возможные расстановки высоток, когда завершит круг?

### Графы

**Граф** — совокупность точек, некоторые из которых соединены отрезками. Точки называются *вершинами* графа, отрезки — *ребрами.*

1. В деревне 9 домов. Известно, что у Гоши соседи Иван и Роман, Максим сосед Ивану и Михаилу, Виктор — Алексею и Андрею, а также по соседству живут Константин с Андреем, Иван с Михаилом, Константин с Алексеем, Михаил с Романом и больше соседей в означенной деревне нет (соседними считаются дворы, у которых есть общий участок забора). Может ли Гоша огородами пробраться к Андрею за яблоками?

2. В стране Цифра есть 9 городов с названиями 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Путешественник обнаружил, что два города соединены авиалинией в том и только в том случае, если двузначное число, составленное из цифр-названий этих городов, делится на 3. Можно ли добраться из города 1 в город 9?

3. В некотором государстве 6 городов и 10 автодорог, каждая из которых связывает какие-то два города. Между городами устанавливается авиационное сообщение, исходя из принципа экономии: авиационная линия между двумя городами устанавливается тогда и только тогда, когда автомобильная дорога между этими городами отсутствует. Сколько авиалиний будет проведено?

**Степень вершины** — количество ребер, выходящих из данной вершины.

4. В стране 1329 городов, из каждого выходит по 4 дороги. Сколько всего дорог в стране?

5. Докажите, что не существует графа с пятью вершинами, степени которых равны 4, 4, 4, 4, 2.

6. Вася считает, что в его классе у всех разное число друзей-одноклассников. Не ошибается ли он?

7. Иван утверждает, что среди любых а) четырёх; б) пяти; в) шести человек обязательно найдётся либо трое знакомых друг с другом, либо трое незнакомых. Не завирается ли он?

8. Петя заметил, что у всех его 25 одноклассников различное число друзей в этом классе.  Сколько друзей у Пети? (Укажите все решения)

*Определение.* Путь, содержащий все ребра графа, называется **эйлеровым путем.**

9. Докажите, что если в графе более двух вершин с нечетными степенями, то в этом графе нет эйлерова пути.

10. Докажите, что если в графе степени всех вершин чётны, то в этом графе есть цикл.

11. Докажите, что если в графе степени всех вершин чётны, то рёбра этого графа можно разбить на несколько циклов.

12. Докажите, что если два цикла имеют общую вершину, то их можно объединить в один самопересекающийся цикл.

13. Докажите, что если в связном графе степени всех вершин чётны, то в этом графе есть эйлеров цикл.

###  Раскраски

**Пример.** Можно ли квадрат 8×8 c вырезанными двумя угловыми клетками разрезать на прямоугольники 1×2

а) в случае прилежащих к одной стороне клеток;

б) в случае диагонально противоположенных клеток?

**Задачи**

1. Можно ли квадрат 10×10 разрезать на четырёхклеточные фигурки в виде буквы Т?

2.Можно ли из пяти фигур, изображенных на рисунке сложить прямоугольник 4×5?



3. Пятнадцать хулиганов вышли на демонстрацию с воздушными шариками и построились в виде квадрата 3×5. По команде каждый проткнул шарик соседа (возможно двое ткнули в один). Докажите, что хотя бы один шарик остался целым.

4. Можно ли доску 8×8 замостить 15-ю горизонтальными и 17-ю вертикальными прямоугольниками 1×2?

5. Придумайте две различных раскраски, показывающие, что квадрат 10×10 нельзя разрезать на прямоугольники 1×4.

6. Придумали в шахматах новую фигуру: «лягушку», которая поочередно делает ходы на 1, 2, 3, 1, 2, 3, ... клетки по вертикали или горизонтали. Может ли такая лягушка обойти всю доску 8×8 побывав в каждой клетке по одному разу?

7. Из доски 11×11 вырезали 15 квадратиков 2×2 по линиям сетки. Докажите, что можно вырезать ещё один квадратик.

### Десятичная запись.

1. И сказал Кащей Ивану Царевичу: «Жить тебе до завтрашнего утра. Утром явишься пред мои очи, задумаю я три цифры x, y и z. Назовёшь ты мне три числа a, b и с. Выслушаю я тебя и скажу, чему равно ax + by + cz. Тогда отгадай, какие цифры x, y, z я задумал. Не отгадаешь – голову с плеч долой!» Запечалился Иван Царевич и пошёл думу думать. Может ли он в живых остаться?

2. Напишите наименьшее натуральное число, составленное из всех возможных различных цифр и делящееся без остатка на 5.

3. Существуют ли два последовательных натуральных числа, сумма цифр каждого из которых делится на 4?

4. Найдите наименьшее натуральное число, сумма цифр которого делится на 5 и сумма цифр следующего за ним натурального числа тоже делится на 5.

5. К задумчиво стоящему на тротуаре человеку, а им оказался математик, подошёл милиционер. «Вы не обратили внимания на номер проехавшего сейчас самосвала?» — спросил он. «О, да! У него был редкостный номер. Второе двузначное число получается из первого перестановкой цифр, а их разность равняется сумме цифр каждого из них» — таков был ответ математика. Какой же номер у самосвала?

6. Найдите двузначное число, обладающее следующим свойством: если зачеркнуть его последнюю цифру, то получится число в 14 раз меньшее.

7. Шестизначное число начинается с цифры 2. Откинув эту цифру слева и написав её справа, получим число, которое в 3 раза больше первоначального. Найдите первоначальное число.

8. Решите ребус:

 

Здесь разными буквами обозначены разные цифры, а одинаковыми буквами — одинаковые.

9. Когда число ПОТОП умножили на 99 999, то получили число, оканчивающееся на 285. Какое число обозначено словом ПОТОП?

10. Найдите все трёхзначные числа, сумма цифр которых уменьшится в 3 раза, если само число увеличить на 3.

11.Число 2999 умножают на число, состоящее из 100 единиц. Найдите сумму цифр полученного произведения.

**Пары и чередования**

1. Барон Мюнхаузен, вернувшись из кругосветного путешествия, рассказывает, что по пути он пересёк границу Трапезундии ровно 7 раз. Стоит ли доверять его словам?

2. В джунглях во время кругосветного путешествия на Мюнхаузена напали пантеры. Когда он проскочил мимо двух из них, они бросились на него, промахнулись и загрызли друг друга. Мюнхаузен повторял этот манёвр ещё раз и ещё, до тех пор, пока все они не загрызли друг друга. По словам Мюнхаузена всего было 97 пантер. Правда ли это?

3. Кузнечик прыгает по прямой — каждый раз на 1 метр влево или вправо. Через некоторое время он оказался в исходной точке. Докажите, что он сделал чётное число прыжков.

4. Из комплекта домино выбросили все кости с «пустышками». Можно ли оставшиеся кости по правилам выложить в ряд?

5. За круглым столом сидят мальчики и девочки. Докажите, что количество пар соседей мальчик–девочка и девочка–мальчик чётно.

6. Улитка ползёт по плоскости с постоянной скоростью, поворачивая на 90 каждые 30 минут. Докажите, что она может вернуться в исходную точку только: **а)** через целое число часов; **б)** через чётное число часов.

7. На шахматной доске стоят 8 ладей, из которых никакие две не бьют друг друга. Докажите, что число ладей стоящих на чёрных полях чётно.

8. К 17-значному числу прибавили число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Докажите, что хотя бы одна цифра полученной суммы чётна.

**Последняя цифра**

1. Найдите последнюю цифру числа а) 1234567 + 9876543;

 б) 13579 х 8642; в)135; г)719.

2. Найдите последнюю цифру числа а) 2100; б) 20172017;

в) 123456789987654321.

3. В книге рекордов Гиннеса написано, что наибольшее известное простое число равно 25321127 — 1. Не опечатка ли это? (Простое число — это натуральное число, имеющее ровно два натуральных делителя.)

4. Делится ли число 4730 + 3950 на 10?

5. В магазин привезли 206 литров молока в бидонах по 10 и 17 литров. Сколько было бидонов каждого вида?

6. Найдите последнюю цифру в произведении: а) всех простых чисел, не превосходящих 1234; б) всех нечётных простых чисел, не превосходящих 1234; в) всех нечётных чисел от 1 до 2017.

7. Сколькими нулями оканчивается число 2017! = 1 х 2 х 3 х ... х 2015 х 2016 х 2017?

8. Докажите, что среди квадратов любых пяти натуральных чисел всегда можно выбрать два, сумма или разность которых делится н 10.

9. Найдите последнюю цифру числа а) (77)7; б)$7^{7^{7}}$.

**Принцип Дирихле**

*Классическое определение принципа Дирихле: в n клетках невозможно рассадить поодиночке n+1 кроликов, т.е найдётся клетка, где сидят не менее двух кроликов*

*Обобщение принципа Дирихле: даны n клеток и nk + 1 кроликов размещены в эти клетки. Тогда найдется клетка, где сидят не менее k + 1 кроликов*

1. У мальчика Феди есть шесть кубиков, на всех гранях которых написаны буквы русского алфавита. Докажите, что какая-то буква встречается дважды *.*
2. Числа 1, 2, 3, 4, ..., 40 разбиты на три группы. Докажите, что хотя бы в одной из групп сумма чисел меньше 274.
3. В одной маленькой стране всего 15 городов. Некоторые из них соединены дорогами. Докажите, что из каких-то двух городов ведет одинаковое число дорог.

**Задачи для самостоятельного решения:**

1. Семь волков съели 50 кроликов. Докажите, что один из волков съел не менее 8 кроликов.
2. Через одну точку проведено четырнадцать прямых. Докажите, что угол между какими-то двумя из них меньше 13º.
3. В ковре размером 4×4 метра моль проела 15 дырок. Всегда ли можно вырезать коврик размером 1×1, не содержащий внутри дырок?
4. Какое самое большое количество а) ладей б) ферзей можно поставить на шахматную доску так, чтобы они не били друг друга?
5. В партии из 300 сапог 150 левых и 150 правых, кроме того, по 100 штук каждого из трех размеров. Докажите, что найдется по крайней мере 50 годных пар обуви.

**Игры**

В приведённых ниже задачах описаны правила различных игр. Требуется указать выигрышную стратегию для одного из игроков.

**Задачи:**

1. Двое по очереди кладут пятаки на круглый стол, причем так, чтобы они не накладывались друг на друга. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

2. Дана шахматная доска. За один ход разрешается покрыть любые две не покрытые ранее клетки доминошкой 1×2. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

3. На столе лежат две стопки монет: в одной из них 30 монет, а в другой — 20. За ход разрешается взять любое количество монет из одной стопки. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто из игроков выигрывает при правильной игре?

4. Имеется две кучки орешков: в первой – 7 орешков, во второй – 5. За ход разрешается брать любое количество орешков из одной кучки или поровну орешков из обеих кучек. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

5. На доске написано число 0. Два игрока по очереди прибавляют любое число от 1 до 5 к числу на доске и записывают вместо него сумму. Выигрывает игрок, который первый запишет на доске число тридцать. Укажите выигрышную стратегию для второго игрока.

6. На окружности расставлено 20 произвольных точек. За один ход можно соединить отрезком (хордой) любые две из них так, чтобы эта хорда не пересекала проведенные ранее хорды. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

7. Остап Бендер провел сеанс одновременной игры в шахматы с двумя гроссмейстерами, причем с одним из соперников он играл чёрными фигурами, а с другим — белыми. За этот сеанс Остап получил 1 очко. Как он смог этого добиться?
*(За победу в шахматной партии дается 1 очко, за ничью пол-очка, за поражение — 0 очков.)*

8. Шахматный король стоит в левом нижнем углу шахматной доски. Участвуют два игрока, которые ходят по очереди. За один ход его можно передвинуть на одно поле вправо, на одно поле вверх или на одно поле по диагонали "вправо-вверх". Выигрывает игрок, который поставит короля в правый верхний угол доски. Кто из игроков выигрывает при правильной игре?

**Признаки делимости на** 3 **и** 9

**Признаки делимости на** 3 **и** 9**:** *целое число делится на* 3 *(на* 9*) тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на* 3 *(на* 9*).*

 Известно, что число 65349\_0712 делится а) на 9; б) на 3. Какая цифра может стоять на месте пропуска? Укажите все возможные варианты!

**1**

Запишем подряд цифры от 1 до 9, получим число 123456789. Простое оно или составное (то есть делится ли оно нацело на что- нибудь, кроме единицы и самого себя)? Изменится ли ответ в задаче, если каким-то образом поменять порядок цифр в этом числе?

**2**

Делится ли число 32561698 на 12? Решите эту задачу: **а)** с помо- щью признака делимости на 4; **б)** с помощью признака делимости на 3.

**3**

**а)** Даша и Таня по очереди выписывают на доску цифры шести- значного числа. Сначала Даша выписывает первую цифру, затем Таня — вторую, и т. д. Таня хочет, чтобы полученное в результате число делилось на 3, а Даша хочет ей помешать. Кто из них может добиться желаемого результата независимо от ходов соперника? **б)** Тот же вопрос, но с делимостью на 9.

**4**

В стране Цифра есть 9 городов с названиями 1*,* 2*,* 3*,* 4*,* 5*,* 6*,* 7*,* 8*,* 9. Путешественник обнаружил, что два города соединены авиалинией в том и только в том случае, если двузначное число, составленное из цифр — названий этих городов, делится на 3. Можно ли добраться из города 1 в город 9?

**5**

У числа 100500! вычислили сумму цифр. Затем у полученной суммы снова вычислили сумму цифр, потом ещё раз, и так до тех пор, пока не получилось однозначное число. Какое это число?

**6**

Чтобы открыть сейф, нужно ввести код — семизначное число, состоящее из двоек и троек. Сейф откроется, если двоек в коде больше, чем троек, а сам код делится и на 3, и на 4. Какой код может открывать сейф?

**7**

**8** В каждом пункте укажите все возможные варианты ответа.

**а)** Число 2 *\** 45 делится на 9. Какую цифру заменили звёздочкой?

**б)** Число 29 *\** 45 *\** делится на 18. Какие цифры заменили звёздочками?

**в)** Число 72 *\** 4 *\** делится на 45. Какие цифры заменили звёздочка- ми?

**г)** Число 1 *\** 456 *\** делится на 36. Какие цифры заменили звёздочками?

**а)** Может ли произведение числа и суммы его цифр равняться 4704? **б)** Может ли натуральное число, записываемое с помощью 10 нулей, 10 единиц и 10 двоек, быть квадратом некоторого другого натурального числа?

**9**

**а)** Верно ли, что если натуральное число делится на 27, то и его сумма цифр делится на 27? **б)** Докажите, что любое целое число, которое втрое больше суммы своих цифр, делится на 27.

**10**

 **11.** Натуральное число В обладает следующим свойством: для любого числа A, которое делится на В, на В также делятся и все числа, полученные из А перестановкой цифр. Докажите, что В может быть равно только 1, 3 или 9?